

Zerlegungen und Überdeckungen von Körpern

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades
doctor rerum naturalium (Dr. rer. nat.)

vorgelegt dem Rat der Fakultät für
Mathematik und Informatik
der Friedrich-Schiller-Universität Jena

von Dipl.-Math. Christian Richter
geboren am 04.10.1969 in Jena

Gutachter:

1. Prof. Dr. Eike Hertel
2. Prof. Dr. Horst Martini
3. Prof. Dr. Jörg M. Wills

Tag des Rigorosums: 23. Februar 1998

Tag der öffentlichen Verteidigung: 2. März 1998

Herrn Dr. Eduard W. Diehl
anlässlich seines 80. Geburtstages gewidmet¹

¹Herr Dr. Diehl studierte zu Beginn des zweiten Weltkrieges Medizin, u.a auch in Jena. Nach dem Krieg wirkte er als Arzt auf Madagaskar und in Arabien am Palastkrankenhaus des Königs, bevor er seine zweite Heimat in Indonesien fand. Gegenwärtig ist er als Leiter und praktizierender Chirurg in seinem in den letzten Jahrzehnten aufgebauten Krankenhaus in Pematang Siantar, Sumatra, aktiv. Herr Dr. Diehl zählt außerdem zu den bekanntesten Entomologen Südostasiens. Er arbeitet im Wettlauf mit der Abholzung des Regenwaldes an einer Aufstellung der Nachtfalterfauna Sumatras (vgl. [Bu]). Darüber hinaus ist Herr Dr. Diehl dem Autor dieser Arbeit als netter Gastgeber bekannt.

Vorwort

Die diskrete Geometrie lebt ganz wesentlich von Forschungen zu (lokal-)endlichen Objektsystemen in metrischen Räumen. Diese Arbeit behandelt drei Fragen, die endliche Zerlegungen bzw. Überdeckungen von Mengen betreffen. Im Gegensatz zum elementargeometrischen Zugang verstehen wir hier unter einer Zerlegung einer Menge immer eine Überdeckung durch mengentheoretisch *disjunkte* Teilmengen.

Im Mittelpunkt des ersten Kapitels steht das Problem der *möglichst einfachen* Replizierbarkeit von Punktmengen des euklidischen Raumes im Sinne des Paradoxons von *S. Banach* und *A. Tarski*. Es ist bekannt, daß man eine Kugel unter Ausnutzung von fünf Teilmengen „verdoppeln“ kann. Diese Anzahl ist minimal, so daß eine in diesem Sinne einfachere Kugelverdoppelung unmöglich ist. Aber schon für die entsprechende Frage der Würfelverdoppelung – natürlich nicht mit Zirkel und Lineal – gibt es nur grobe Abschätzungen der minimalen Teileanzahl. Dieses offene Problem diente als Motivation für unsere Betrachtungen. Wir werden einige obere Abschätzungen für die Optimalzahlen zur paradoxen Vervielfachung von Punktmengen $M \subseteq \mathbb{R}^3$ vorstellen. Die dabei benutzten Zerlegungen von M werden stets mit Hilfe von Überdeckungen der Menge M durch Bilder möglichst weniger Teilmengen eines geeigneten Typs konstruiert werden.

Die im zweiten Kapitel behandelten Fragen stammen zunächst nicht aus der Geometrie. Vielmehr geht es um zwei Verfahren zur Approximation stetiger reeller Funktionen auf kompakten metrischen Räumen. Dazu werden Funktionensysteme benutzt, die auf sogenannten *kontrollierbaren* Überdeckungen bzw. Zerlegungen des jeweiligen Raumes „leben“. Kontrollierbarkeit ist dabei eine Uniformitätsbedingung, die es uns ermöglicht, mit fast ausschließlich geometrischen Überlegungen zu approximationstheoretischen Ergebnissen zu gelangen. Wir werden unsere Betrachtungen auf den n -dimensionalen Würfel $([0, 2]^n, d_{\max})$ beschränken. Hier führt das Konzept der Kontrollierbarkeit zu besonders interessanten geometrischen Strukturen, die eng mit Gittern auf dem Würfel zusammenhängen. Dieser Sachverhalt erlaubt es, zu weit mehr Resultaten als auf allgemeinen kompakten metrischen Räumen (X, d) zu gelangen.

Das Schlußkapitel beschäftigt sich mit der Frage, ob eine vorgegebene Menge in ein gewisse Anzahl von Teilmengen zerlegt werden kann, die paarweise durch Transformationen einer Gruppe aufeinander abbildbar sind. Ein Satz von *M. Edelstein*

besagt, daß keine kompakte konvexe Menge eine Zerlegung in zwei Teile besitzt, die durch eine affine Abbildung auseinander hervorgehen. Wir werden dazu einen neuen Beweis präsentieren, der uns eine leichte Übertragung des Resultates in die sphärische und die hyperbolische Geometrie ermöglicht. Weiterhin werden wir die Frage beantworten, für welche Anzahlen m eine Kugel im n -dimensionalen euklidischen Raum eine Zerlegung in m Teilmengen gestattet, die vermöge der Gruppe der topologischen Abbildungen des Raumes untereinander äquivalent sind.

Natürlich erhebt diese Arbeit keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Es liegt in der Natur mathematischer Forschungen, daß immer wieder Fragen offen bleiben. Auf spezielle ungelöste Probleme werden wir an geeigneter Stelle hinweisen. Außerdem werden wir die unseren Überlegungen zugrunde liegenden Begriffsbildungen bewußt nicht zu eng wählen, um den Blick für verwandte Fragestellungen nicht zu versperren.

Meinem Freund und Lehrer Herrn Prof. Dr. *Eike Hertel* möchte ich für die Betreuung der vorliegenden Arbeit und insbesondere für die Motivation der im ersten und dritten Kapitel dargestellten Forschungen herzlich danken. Ein spezieller Dank gebührt Frau Prof. Dr. *Irmtraud Stephani* für die Anregung der approximationstheoretischen Fragestellungen des zweiten Kapitels und für wertvolle technische Hinweise. Schließlich sei meinem Vater, Herrn *Rudolf Richter*, für das aufmerksame Probelesen des Manuskripts gedankt.

Jena, im Herbst 1997

Christian Richter

Inhaltsverzeichnis

1	Einfache paradoxe Replikationen von Mengen	6
1.1	Der Satz von Banach und Tarski	6
1.1.1	Einführung	6
1.1.2	Replikation von Kugeln	11
1.1.3	Eine Verallgemeinerung	14
1.2	Replikation von Mengen	17
1.2.1	Abschätzungen klassischer Art	17
1.2.2	Eine neuartige Abschätzung	19
1.2.3	Ein Überdeckungslemma	23
1.2.4	Die Vervielfachung des Würfels	24
1.2.5	Abschließende Bemerkungen	29
2	Würfelzerlegungen und Approximation	31
2.1	Approximation mittels kontrollierbarer Zerlegungen der Einheit . . .	32
2.1.1	Einführung	32
2.1.2	Kontrollierbarkeit und Gitter auf dem Würfel	35
2.1.3	Die Menge $\text{cl}(\Phi_{2^n}([0, 2]^n))$	42
2.1.4	Optimalität der <i>Jackson</i> -Abschätzung	48
2.2	Approximation durch kontrollierbare Treppenfunktionen	52
2.2.1	Einführung	52
2.2.2	Eine inverse Abschätzung	54
2.2.3	Ketten kontrollierbarer Zerlegungen des Würfels	56
3	Pflasterbarkeit konvexer Mengen	65
3.1	Einführung	65
3.2	Die Unteilbarkeit konvexer Kompakta	67
3.2.1	Ein Lemma über konvextreue Homöomorphismen	67
3.2.2	Unteilbarkeitsaussagen in verschiedenen Räumen	69
3.3	Topologische Pflasterungen von Kugeln	71
3.3.1	Pflasterungen abgeschlossener Kugeln	71
3.3.2	Pflasterungen nicht abgeschlossener Kugeln	77

Kapitel 1

Einfache paradoxe

Replikationen von Mengen

Moderne mathematische Forschungen erlauben es immer wieder, alte Probleme aus einem neuen Blickwinkel zu betrachten. So konnte *M. Laczkovich* zeigen, daß jeder Kreis eine endliche disjunkte Zerlegung erlaubt, so daß man durch geeignete Translationen der einzelnen Teile eine Zerlegung eines flächengleichen Quadrates erhält (vgl. [Lac]). Dieses sensationelle Ergebnis wurde von *R.L. Gardner* und *S. Wagon* in einer Arbeit unter dem provozierenden, aber zutreffenden Titel „At long last, the circle has been squared“ (vgl. [Ga/Wa]) gewürdigt. Tatsächlich gelang *M. Laczkovich* eine „Quadratur des Kreises“, wenn auch nicht im elementargeometrischen, so doch in einem zerlegungstheoretischen Sinn und unter Ausnutzung des Auswahlaxioms.

Das Auswahlaxiom ist auch die Basis für die Zerlegungsgleichheit von Mengen im Sinne des Paradoxons von *S. Banach*, *A. Tarski* und *F. Hausdorff*. Paradoxe Zerlegungen dieser Art erlauben insbesondere einen modernen Zugang zum klassischen Delischen Problem der Verdoppelung des Würfels (vgl. [Brei]). In der Tat gibt es eine endliche disjunkte Zerlegung des Würfels, so daß man aus den Teilen *zwei* zum Ausgangswürfel kongruente Körper zusammensetzen kann. Es stellt sich die Frage nach solchen Zerlegungen möglichst einfacher Art im Sinne einer Minimierung der Anzahl der benutzten Teile. Ziel dieses Kapitels ist die Suche nach Abschätzungen der minimalen Teileanzahl bei paradoxen Zerlegungen – insbesondere bei der Replikation von Mengen.

1.1 Der Satz von Banach und Tarski

1.1.1 Einführung

Es bezeichne \mathcal{B}^3 die Gruppe der Bewegungen des euklidischen Raumes \mathbb{R}^3 . Zwei Mengen $A, B \in 2^{\mathbb{R}^3}$ werden kongruent genannt ($A \simeq B$), wenn sie vermöge einer

Transformation aus \mathcal{B}^3 aufeinander abbildbar sind. Weiterhin sei $\langle 2^{\mathbb{R}^3} \rangle$ die von der Potenzmenge $2^{\mathbb{R}^3}$ erzeugte freie abelsche Halbgruppe. Die Elemente $a \in \langle 2^{\mathbb{R}^3} \rangle$ sind also formale endliche Summen $a = A_1 + A_2 + \dots + A_k$ von Teilmengen des Raumes \mathbb{R}^3 . Ferner sei $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ die Menge der natürlichen Zahlen einschließlich der Null. In Verallgemeinerung der Multikongruenz von Mengen $A, B \in 2^{\mathbb{R}^3}$ (vgl. [Ba/Ta], [Ha] und [Wa2], S. 23f) definieren wir die (disjunkte) Zerlegungsgleichheit von Summen $a, b \in \langle 2^{\mathbb{R}^3} \rangle$.

Definition 1.1 (a) *Es seien $a = A_1 + A_2 + \dots + A_k, b = B_1 + B_2 + \dots + B_l \in \langle 2^{\mathbb{R}^3} \rangle$ und $n \in \mathbb{N}$. Die Summen a und b heißen zerlegungsgleich unter Benutzung von n Teilen ($a \stackrel{n}{\simeq} b$), falls es Darstellungen $n = r_1 + r_2 + \dots + r_k, r_i \in \mathbb{N}$, und $n = s_1 + s_2 + \dots + s_l, s_j \in \mathbb{N}$, disjunkte Zerlegungen*

$$A_i = \bigcup_{u=r_1+\dots+r_{i-1}+1}^{r_1+\dots+r_i} M_u \quad \text{und} \quad B_j = \bigcup_{v=s_1+\dots+s_{j-1}+1}^{s_1+\dots+s_j} N_v$$

für $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ und $j \in \{1, 2, \dots, l\}$ sowie eine Permutation $\pi \in \mathcal{S}_n$ gibt, so daß

$$N_v \simeq M_{\pi(v)}$$

für $v \in \{1, 2, \dots, n\}$ gilt.

(b) *Zwei Summen $a, b \in \langle 2^{\mathbb{R}^3} \rangle$ heißen zerlegungsgleich ($a \stackrel{*}{\simeq} b$), wenn $a \stackrel{n}{\simeq} b$ für eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt.*

Anschaulich gesprochen, bedeutet die Zerlegungsgleichheit $a \stackrel{n}{\simeq} b$ lediglich, daß es einen aus n Mengen bestehenden Baukasten gibt, so daß man unter Benutzung euklidischer Bewegungen aus den n Teilen einerseits alle Summanden von a und andererseits auch alle Summanden von b zusammensetzen kann, wobei in beiden Fällen – wie bei einem Puzzlespiel – alle Teile aus dem Baukasten Verwendung finden müssen. Für Mengen $A, B \in 2^{\mathbb{R}^3}$ sind beispielsweise die Relationen $A \stackrel{1}{\simeq} A$, $A + B \stackrel{2}{\simeq} A + B$, aber auch $A \stackrel{n}{\simeq} A$ für $n \geq 1$ und $A \stackrel{1}{\simeq} A + \emptyset$ erfüllt. Insbesondere gilt $\emptyset \stackrel{0}{\simeq} k \cdot \emptyset$ für $k \geq 1$. Die klassische Multikongruenz (Zerlegungsgleichheit) $A \stackrel{*}{\simeq} B$ von Mengen $A, B \in 2^{\mathbb{R}^3}$ und insbesondere die Kongruenz $A \stackrel{1}{\simeq} B$ sind offensichtlich als Spezialfälle in der obigen Begriffsbildung mit erfaßt.

Man könnte die Definition verallgemeinern, indem man den Raum \mathbb{R}^3 und die Gruppe \mathcal{B}^3 durch eine beliebige Menge und eine Transformationsgruppe dieser Menge ersetzt. Weitreichende derartige Überlegungen findet man in [Wa2]. Unser Augenmerk richtet sich jedoch auf die Zerlegungsgleichheit im Raum \mathbb{R}^3 . Wir wollen hier nur anmerken, daß sich auch die folgenden Definitionen dieses Absatzes sowie die Sätze 1.2 und 1.5 direkt in die angedeutete allgemeinere Notation übertragen lassen. Wir erhalten unmittelbar die folgende Aussage.

Satz 1.2 *Die Relation $\stackrel{*}{\simeq}$ ist eine Äquivalenzrelation in $\langle 2^{\mathbb{R}^3} \rangle$. Genauer gilt:*

(a) *Für jedes $a = A_1 + A_2 + \dots + A_k \in \langle 2^{\mathbb{R}^3} \rangle$ und jedes $n \geq 0$ gilt $a \stackrel{k+n}{\simeq} a$.*

- (b) Für alle $a, b \in \langle 2^{R^3} \rangle$ mit $a \stackrel{n}{\simeq} b$ folgt $b \stackrel{n}{\simeq} a$.
- (c) Für alle $a, b, c \in \langle 2^{R^3} \rangle$ mit $a \stackrel{n}{\simeq} b$ und $b \stackrel{m}{\simeq} c$ folgt $a \stackrel{nm}{\simeq} c$. \square

Der klassische Multikongruenzsatz von *S. Banach* und *A. Tarski* lautet folgendermaßen (vgl. [Ba/Ta], [Ha] und [Wa2], S. 29).

Satz 1.3 (Banach, Tarski) Sind $A, B \subseteq \mathbb{R}^3$ zwei beschränkte Mengen mit nicht-leerem Inneren, dann gilt $A \stackrel{*}{\simeq} B$. \square

Hier gibt es zunächst keine Aussage über die Anzahlen n , mit denen die Zerlegungsgleichheit $A \stackrel{n}{\simeq} B$ realisierbar ist. Beweistechniken dieses Satzes liefern nur grobe Abschätzungen. So wird in [Ha] die obere Schranke $n \leq \left(1 + 2420 \left(\frac{R}{r}\right)^6\right)^2$ angegeben, wobei r der Inkugelradius des Durchschnittes und R der Umkugelradius der Vereinigung von A und B sind. (Man kann o.B.d.A. von einer gegenseitigen Lage der Mengen A und B ausgehen, bei der der Quotient $\frac{R}{r}$ möglichst klein ist.) Wir wollen eine naheliegende Verallgemeinerung dieses Satzes herleiten und dabei eine obere Abschätzung für die minimal verwendbare Teileanzahl beweisen (vgl. Satz 1.12). Dazu wird das folgende technische Konzept Verwendung finden.

Definition 1.4 (a) Zwei Summen $a = A_1 + A_2 + \dots + A_k$ und b aus $\langle 2^{R^3} \rangle$ stehen in der Relation $a \stackrel{n}{\succeq} b$, $n \in \mathbb{N}$, wenn es Teilmengen $A'_i \subseteq A_i$, $1 \leq i \leq k$, gibt, so daß für $a' = A'_1 + A'_2 + \dots + A'_k$ die Relation $a' \stackrel{n}{\simeq} b$ gilt.

(b) Für $a, b \in \langle 2^{R^3} \rangle$ gelte die Relation $a \stackrel{*}{\succeq} b$ (a ist zerlegungstheoretisch größer als b), wenn die Relation $a \stackrel{n}{\succeq} b$ für eine natürliche Zahl n erfüllt ist.

Wir sehen wiederum leicht, daß $\stackrel{*}{\succeq}$ eine reflexive und transitive Relation auf $\langle 2^{R^3} \rangle$ ist. In der Tat gilt $a \stackrel{k}{\succeq} a$ für jedes $a = A_1 + A_2 + \dots + A_k \in \langle 2^{R^3} \rangle$, und für $a, b, c \in \langle 2^{R^3} \rangle$ mit $a \stackrel{n}{\succeq} b$ und $b \stackrel{m}{\succeq} c$ folgt $a \stackrel{nm}{\succeq} c$. Außerdem ist $\stackrel{*}{\succeq}$ mit der Zerlegungsgleichheit \simeq verträglich, denn für $a, b, \tilde{a}, \tilde{b} \in \langle 2^{R^3} \rangle$ mit $a \stackrel{n}{\simeq} b$ und $\tilde{a} \stackrel{\tilde{n}}{\simeq} \tilde{b}$ folgt aus $a \stackrel{m}{\succeq} \tilde{a}$ stets $b \stackrel{nm\tilde{n}}{\succeq} \tilde{b}$. (Dies ist eine unmittelbare Folgerung aus $b \stackrel{n}{\succeq} a$, $a \stackrel{m}{\succeq} \tilde{a}$, $\tilde{a} \stackrel{\tilde{n}}{\succeq} \tilde{b}$ und der Transitivitätseigenschaft.) Als eine direkte Verallgemeinerung des *Banach-Schröder-Bernstein*-Theorems (vgl. [Wa2], S. 25) erhalten wir folgenden Satz. Beim Beweis folgen wir im wesentlichen den Überlegungen aus [Wa2].

Satz 1.5 Es seien $a, b \in \langle 2^{R^3} \rangle$, so daß die Relationen $a \stackrel{n}{\succeq} b$ und $b \stackrel{m}{\succeq} a$ erfüllt sind. Dann folgt $a \stackrel{n+m}{\simeq} b$. Somit induziert $\stackrel{*}{\succeq}$ in kanonischer Weise eine Halbordnung auf der Klasseneinteilung $\langle 2^{R^3} \rangle / \stackrel{\sim}{\simeq}$.

Beweis: Wir gehen von den Darstellungen $a = A_1 + A_2 + \dots + A_k$ und $b = B_1 + B_2 + \dots + B_l$ aus. Die Summen a und b werden durch die formalen disjunkten Vereinigungen

$$\hat{a} = \{(x, i) : 1 \leq i \leq k, x \in A_i\}$$

und

$$\hat{b} = \{(x, j) : 1 \leq j \leq l, x \in B_j\}$$

der Mengen A_i bzw. B_j repräsentiert. Wegen der Gültigkeit von $a \stackrel{n}{\succeq} b$ gibt es eine Summe $a' = A'_1 + A'_2 + \dots + A'_k$, $A'_i \subseteq A_i$ für $1 \leq i \leq k$, so daß $a' \stackrel{n}{\simeq} b$ gilt. Danach existieren disjunkte Zerlegungen

$$A'_i = \bigcup_{u=r_1+\dots+r_{i-1}+1}^{r_1+\dots+r_i} M_u \quad \text{und} \quad B_j = \bigcup_{v=s_1+\dots+s_{j-1}+1}^{s_1+\dots+s_j} \varphi_{\pi(v)}(M_{\pi(v)})$$

mit $r_1 + r_2 + \dots + r_k = s_1 + s_2 + \dots + s_l = n$, $\pi \in \mathcal{S}_n$ und $\varphi_u \in \mathcal{B}^3$ für $1 \leq u \leq n$. Schreibt man auch a' als disjunkte Vereinigung

$$\hat{a}' = \{(x, i) : 1 \leq i \leq k, x \in A'_i\} \subseteq \hat{a},$$

so wird die Zerlegungsgleichheit $a' \stackrel{n}{\simeq} b$ durch die Bijektion

$$\varphi : \hat{a}' \rightarrow \hat{b} \quad \text{mit} \quad \varphi(x, i) = (\varphi_{\pi(v)}(x), j)$$

für

$$\begin{aligned} r_1 + \dots + r_{i-1} + 1 &\leq \pi(v) \leq r_1 + \dots + r_i, & x \in M_{\pi(v)} & \quad \text{und} \\ s_1 + \dots + s_{j-1} + 1 &\leq v \leq s_1 + \dots + s_j, \end{aligned}$$

die sich stückweise aus den Bewegungen φ_u „zusammensetzt“, beschrieben.

Umgekehrt existiert aufgrund von $b \stackrel{m}{\succeq} a$ eine Summe $b' = B'_1 + B'_2 + \dots + B'_l$, $B'_j \subseteq B_j$ für $1 \leq j \leq l$, so daß $a \stackrel{m}{\simeq} b'$ gilt. Also gibt es wiederum Zerlegungen

$$A_i = \bigcup_{f=p_1+\dots+p_{i-1}+1}^{p_1+\dots+p_i} N_f \quad \text{und} \quad B'_j = \bigcup_{g=q_1+\dots+q_{j-1}+1}^{q_1+\dots+q_j} \psi_{\omega(g)}(N_{\omega(g)})$$

mit $p_1 + p_2 + \dots + p_k = q_1 + q_2 + \dots + q_l = m$, $\omega \in \mathcal{S}_n$ und $\psi_f \in \mathcal{B}^3$ für $1 \leq f \leq m$. Wir schreiben auch b' als disjunkte Vereinigung

$$\hat{b}' = \{(x, j) : 1 \leq j \leq l, x \in B'_j\} \subseteq \hat{b}$$

und repräsentieren die Zerlegungsgleichheit $a \stackrel{m}{\simeq} b'$ durch die Bijektion

$$\psi : \hat{a} \rightarrow \hat{b}' \quad \text{mit} \quad \psi(x, i) = (\psi_{\omega(g)}(x), j)$$

für

$$\begin{aligned} p_1 + \dots + p_{i-1} + 1 &\leq \omega(g) \leq p_1 + \dots + p_i, & x \in N_{\omega(g)} & \quad \text{und} \\ q_1 + \dots + q_{j-1} + 1 &\leq g \leq q_1 + \dots + q_j. \end{aligned}$$

Nun definieren wir induktiv $\hat{c}_0 = \hat{a} \setminus \hat{a}'$ und $\hat{c}_{t+1} = \varphi^{-1}\psi(\hat{c}_t)$. Ferner setzen wir $\hat{c} = \bigcup_{t=0}^{\infty} \hat{c}_t$. Wir beobachten, daß die Inklusion $\hat{c}_t \subseteq \hat{a}'$ für $t \geq 1$ gilt. Deshalb erhalten wir

$$\begin{aligned} \varphi(\hat{a} \setminus \hat{c}) &= \varphi\left((\hat{a} \setminus \hat{c}_0) \cap \left(\hat{a} \setminus \bigcup_{t=1}^{\infty} \hat{c}_t\right)\right) = \varphi\left(\hat{a}' \cap \left(\hat{a} \setminus \bigcup_{t=1}^{\infty} \hat{c}_t\right)\right) \\ &= \varphi\left(\hat{a}' \cap \left(\hat{a}' \setminus \bigcup_{t=1}^{\infty} \hat{c}_t\right)\right) = \varphi\left(\hat{a}' \setminus \bigcup_{t=1}^{\infty} \hat{c}_t\right) = \hat{b} \setminus \bigcup_{t=1}^{\infty} \psi(\hat{c}_{t-1}), \end{aligned}$$

also

$$\varphi(\hat{a} \setminus \hat{c}) = \hat{b} \setminus \psi(\hat{c}).$$

Die Bijektion $\varphi|_{\hat{d}}$ von $\hat{d} = \hat{a} \setminus \hat{c}$ auf $\hat{e} = \hat{b} \setminus \psi(\hat{c})$ beschreibt die Zerlegungsgleichheit $d \stackrel{n}{\simeq} e$ der Summen

$$d = D_1 + D_2 + \dots + D_k \quad \text{und} \quad e = E_1 + E_2 + \dots + E_l$$

mit

$$D_i = \{x : (x, i) \in \hat{a} \setminus \hat{c}\} \subseteq A_i, \quad 1 \leq i \leq k,$$

bzw.

$$E_j = \{x : (x, j) \in \hat{b} \setminus \psi(\hat{c})\} \subseteq B_j, \quad 1 \leq j \leq l,$$

vermöge der Zerlegungen

$$D_i = A'_i \cap D_i = \bigcup_{u=r_1+\dots+r_{i-1}+1}^{r_1+\dots+r_i} (M_u \cap D_i)$$

und

$$E_j = \bigcup_{v=s_1+\dots+s_{j-1}+1}^{s_1+\dots+s_j} (\varphi_{\pi(v)}(M_{\pi(v)} \cap E_j)) = \bigcup_{v=s_1+\dots+s_{j-1}+1}^{s_1+\dots+s_j} \varphi_{\pi(v)}(M_{\pi(v)} \cap D_{i(v)}),$$

wobei $i(v)$ so gewählt ist, daß $r_1 + \dots + r_{i(v)-1} + 1 \leq \pi(v) \leq r_1 + \dots + r_{i(v)}$ gilt.

Analog erhalten wir mit Hilfe der Bijektion $\psi|_{\hat{c}}$ von \hat{c} auf $\psi(\hat{c})$ die Zerlegungsgleichheit $d' \stackrel{m}{\simeq} e'$ der Summen

$$d' = D'_1 + D'_2 + \dots + D'_k \quad \text{und} \quad e' = E'_1 + E'_2 + \dots + E'_l$$

mit

$$D'_i = \{x : (x, i) \in \hat{c}\} = A_i \setminus D_i, \quad 1 \leq i \leq k,$$

und

$$E'_j = \{x : (x, j) \in \psi(\hat{c})\} = B_j \setminus E_j, \quad 1 \leq j \leq l.$$

Aus den Relationen $d \stackrel{n}{\simeq} e$ und $d' \stackrel{m}{\simeq} e'$ folgt wegen der Gestalten der Summen d, d', e, e' nun leicht $a \stackrel{n+m}{\simeq} b$. \square

Wir beschließen diesen Abschnitt mit der Einführung eines letzten Begriffes.

Definition 1.6 *Es seien $a, b \in \langle 2^{R^3} \rangle$ zwei zerlegungsgleiche Summen. Unter dem Grad der Zerlegungsgleichheit von a und b verstehen wir die Zahl*

$$\deg(a, b) = \min \left\{ n : a \stackrel{n}{\simeq} b \right\}.$$

Unsere Frage nach der Minimalzahl der Teile, die zur k -fachen Replikation einer Menge $M \subseteq \mathbb{R}^3$ benötigt werden, entspricht in der obigen Notation also der Frage nach der Zahl $\deg(M, k \cdot M)$. Im folgenden wollen wir nach Abschätzungen solcher Optimalzahlen suchen.

1.1.2 Replikation von Kugeln

Der Multikongruenzsatz von *S. Banach* und *A. Tarski* beruht ganz entscheidend auf der Verdoppelbarkeit von Kugeln $K \subseteq \mathbb{R}^3$, also auf der Relation $K \overset{*}{\simeq} K + K$. Zunächst entdeckte *F. Hausdorff*, daß der Lebesguesche Inhaltsbegriff nicht auf die Gesamtheit *aller* (beschränkten) Teilmengen des Raumes \mathbb{R}^3 ausdehnbar ist (vgl. [Hau]). Er konnte zeigen, „daß eine Kugelhälfte mit einem Kugeldrittel kongruent sein kann, oder genauer, daß (von einer abzählbaren Menge abgesehen) die Kugel K in drei Mengen A, B, C gespalten werden kann derart, daß A, B, C und $B + C$ paarweise kongruent sind“, wobei *F. Hausdorff* mit „ $B + C$ “ die mengentheoretische Vereinigung $B \cup C$ bezeichnete. Der Beweis dieser Aussage beruht ganz wesentlich auf der Eigenschaft der Decktransformationsgruppe euklidischer Kugeln, freie nicht-abelsche Untergruppen vom Rang 2 zu besitzen. Die Mengen A, B, C werden durch Betrachtungen der Orbits von Punkten bezüglich solcher Untergruppen konstruiert. *S. Banach* und *A. Tarski* leiteten ihren auch als *Banach-Tarski-Paradoxon* bekannten Multikongruenzsatz aus *F. Hausdorffs* Resultat ab (vgl. [Ba/Ta]), so daß man genauer vom *Banach-Tarski-Hausdorff-Paradoxon* sprechen sollte.

Wir bezeichnen mit $B(x, r)$ die abgeschlossene euklidische Kugel mit Mittelpunkt $x \in \mathbb{R}^3$ und Radius $r > 0$. Für die zweidimensionale Sphäre (den Rand $\text{bd}(B(0, 1))$ von $B(0, 1)$) schreiben wir S^2 . Die Gruppe der eigentlichen Deckbewegungen von $B(0, 1)$ bzw. S^2 wird wie üblich mit SO_3 bezeichnet. Bei unseren Betrachtungen wollen wir auf den folgenden Satz zurückgreifen. Die Teile (a) und (b) folgen unmittelbar aus den Beweisen der Theoreme 4.5 bzw 4.7 aus [Wa2].

Satz 1.7 *Es seien $\rho, \sigma \in SO_3$ Generatoren einer freien nichtabelschen Untergruppe vom Rang 2. Dann gilt:*

(a) *Es gibt Mengen A, B, C, D , so daß die Sphäre S^2 disjunkte Zerlegungen*

$$S^2 = A \cup B \cup C \cup D = A \cup \rho(B) = C \cup \sigma(D)$$

besitzt.

(b) *Es gibt Mengen A', B', C', D', E' und eine Translation τ , so daß $B(0, 1)$ die disjunkten Zerlegungen*

$$B(0, 1) = A' \cup B' \cup C' \cup D' \cup E' = A' \cup \rho(B') = C' \cup \sigma(D') \cup \tau(E')$$

erlaubt. \square

Außerdem benötigen wir folgendes Lemma (vgl. [deG]).

Lemma 1.8 ([deG]) *Sind $\rho, \sigma \in SO_3$ Drehungen mit gleichem Drehwinkel α an zueinander orthogonalen Achsen, wobei $\tan(\frac{\alpha}{2})$ eine transzendente Zahl ist, dann erzeugen ρ und σ eine freie nichtabelsche Gruppe vom Rang 2.* \square

Wir können daraus einen Satz über k -fache Replikationen von Sphären, Kugeln und punktierten Kugeln mit minimaler Teileanzahl ableiten. Dabei verstehen wir

unter einer *punktierten Kugel* mit Mittelpunkt x und Radius r die Menge $B^p(x, r) = B(x, r) \setminus \{x\}$.

Satz 1.9 *Es seien $x \in \mathbb{R}^3$, $r > 0$ und $k \in \{2, 3, 4, \dots\}$. Dann sind die Sphäre $S = \text{bd}(B(x, r))$ und die Kugeln $B^p(x, r)$ und $B(x, r)$ jeweils k -fach replizierbar mit*

$$\deg(S, k \cdot S) = \deg(B^p(x, r), k \cdot B^p(x, r)) = 2k$$

bzw.

$$\deg(B(x, r), k \cdot B(x, r)) = 3k - 1.$$

Beweis: Wir können o.B.d.A. $x = 0$ und $r = 1$ annehmen, also $S = S^2$ bzw. $B(x, r) = B(0, 1)$. Nach Lemma 1.8 gibt es Drehungen $\rho, \sigma \in SO_3$, die eine freie nichtabelsche Untergruppe erzeugen. Auf diese Bewegungen wenden wir Satz 1.7 an.

Zunächst nutzen wir die Notationen aus Teil (a) von Satz 1.7 zur Untersuchung der Sphäre. Wir definieren $B_{i+1} = \rho^{-(i-1)}(B)$, $C_i = \rho^{-(i-1)}(C)$ und $D_i = \rho^{-(i-1)}(D)$ für $i = 1, 2, 3, \dots$. Durch Induktion nach k erhalten wir disjunkte Zerlegungen

$$S = A \cup B_k \cup C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_{k-1} \cup D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_{k-1} \quad (1.1)$$

sowie

$$\begin{aligned} S &= A \cup \rho^{k-1}(B_k) & \text{und} \\ S &= \rho^{i-1}(C_i) \cup \sigma \rho^{i-1}(D_i) & \text{für } 1 \leq i \leq k-1. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Als Induktionsbeginn für $k = 2$ dient die Aussage von Satz 1.7 (a). Zum Schluß von k auf $k + 1$ beobachten wir zunächst, daß die erste Formel von (1.2) die Zerlegung $\rho^{k-1}(B_k) = B \cup C \cup D$ und somit auch $B_k = B_{k+1} \cup C_k \cup D_k$ impliziert. Aus (1.1) folgt damit unmittelbar

$$S = A \cup B_{k+1} \cup C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_k \cup D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_k.$$

Die Aussagen (1.2) sind für jedes k direkte Folgerungen aus Satz 1.7 (a). Damit sind (1.1) und (1.2) bewiesen. Diese Zerlegungen von S zeigen aber die Zerlegungsgleichheit von S und $k \cdot S$ unter Benutzung von $2k$ Teilen, insbesondere $\deg(S, k \cdot S) \leq 2k$.

Andererseits ist eine Zerlegungsgleichheit von S und $k \cdot S$ mit $n < 2k$ Teilen nicht möglich, denn dann gäbe es eine Zerlegung $S = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_n$, so daß sich die k Summanden von $k \cdot S$ aus Bildern $\varphi_u(M_u)$ zusammensetzen würden. Wegen $n < 2k$ bliebe für mindestens einen Summanden S nur eine Menge $\varphi_{u_0}(M_{u_0})$, also wäre $M_{u_0} = S$ und damit $M_u = \emptyset$ für $u \neq u_0$. Die Bilder $\varphi_u(M_u)$ dieser Mengen können aber offenbar keine Zerlegungen der anderen Summanden von $k \cdot S$ bilden. Damit haben wir gezeigt, daß $\deg(S, k \cdot S) \geq 2k$ ist.

Mit der punktierten Kugel $B^p(x, r) = B^p(0, 1)$ können wir völlig analog wie mit der Sphäre $S = S^2$ verfahren, wenn wir statt der Punkte $x \in S$ der Sphäre die zugehörigen halboffenen Radien $\{\lambda x : 0 < \lambda \leq 1\}$ der Kugel betrachten.

Für die Betrachtungen zur Vollkugel $B(x, r) = B(0, 1)$ gehen wir von den Bezeichnungen aus Satz 1.7 (b) aus. Für $i = 1, 2, 3, \dots$ setzen wir $B'_{i+1} = \rho^{-(i-1)}(B')$, $C'_i = \rho^{-(i-1)}(C')$, $D'_i = \rho^{-(i-1)}(D')$ und $E'_i = \rho^{-(i-1)}(E')$. Analog zu obigen Überlegungen erhalten wir durch Induktion nach k die Zerlegungen

$$B(x, r) = A' \cup B'_k \cup C'_1 \cup \dots \cup C'_{k-1} \cup D'_1 \cup \dots \cup D'_{k-1} \cup E'_1 \cup \dots \cup E'_{k-1} \quad (1.3)$$

sowie

$$\begin{aligned} B(x, r) &= A' \cup \rho^{k-1}(B'_k) & \text{und} \\ B(x, r) &= \rho^{i-1}(C'_i) \cup \sigma \rho^{i-1}(D'_i) \cup \tau \rho^{i-1}(E'_i) & \text{für } 1 \leq i \leq k-1. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Dies zeigt $B(x, r) \stackrel{3k-1}{\simeq} k \cdot B(x, r)$, insbesondere $\deg(B(x, r), k \cdot B(x, r)) \leq 3k-1$.

Zum Nachweis von $\deg(B(x, r), k \cdot B(x, r)) \geq 3k-1$ nehmen wir an, daß $B(x, r)$ und $k \cdot B(x, r)$ zerlegungsgeich unter Benutzung von $n < 3k-1$ Teilen wären. Folglich gibt es eine Zerlegung

$$B(x, r) = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_n \quad (1.5)$$

und Bewegungen $\varphi_u \in \mathcal{B}^3$, $1 \leq u \leq n$, so daß man aus den Bildern $\varphi_u(M_u)$ die Kugel $B(x, r)$ k -mal zusammensetzen kann. Wie oben erkennen wir, daß für die Zerlegung je einer dieser k Kugeln mindestens zwei der Mengen $\varphi_u(M_u)$ benötigt werden. Wegen $n < 3k-1$ müssen wenigstens zwei der Kugeln aus genau zwei dieser Bilder zusammengesetzt sein. O.B.d.A. gelte

$$B(x, r) = \varphi_1(M_1) \cup \varphi_2(M_2) \quad \text{und} \quad B(x, r) = \varphi_3(M_3) \cup \varphi_4(M_4). \quad (1.6)$$

Nun können wir einer Überlegung aus [Wa2], S. 40f, folgen: Zunächst beobachten wir, daß nicht alle vier Bewegungen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ den Mittelpunkt x von $B(x, r)$ auf sich abbilden können, da sonst nicht beide Gleichungen (1.6) erfüllbar sind, weil gemäß (1.5) höchstens eine der Mengen M_u , $1 \leq u \leq 4$, den Punkt x enthält. O.B.d.A. sei $\varphi_4(x) \neq x$. Damit liegt der Durchschnitt $\varphi_4(M_4) \cap S$ in einer offenen Halbsphäre der Kugeloberfläche S . Deshalb enthält $\varphi_3(M_3) \cap S$ eine abgeschlossene Halbsphäre von S , denn $\varphi_3(M_3) \cap S = S \setminus (\varphi_4(M_4) \cap S)$ gemäß (1.6). Somit gilt $\varphi_3(x) = x$. Also enthält auch $M_3 \cap S$ eine abgeschlossene Halbsphäre H von S .

Nach (1.5) folgt $(M_1 \cup M_2) \cap S \subseteq S \setminus (M_3 \cap S) \subseteq S \setminus H$; also liegen $M_1 \cap S$ und $M_2 \cap S$ jeweils in der offenen Halbsphäre $S \setminus H$. Folglich gilt $\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = x$, denn andernfalls würde man wie bei den entsprechenden Überlegungen zu φ_4 erhalten, daß eine der Mengen $M_1 \cap S$ bzw. $M_2 \cap S$ eine abgeschlossene Halbsphäre von S umfassen müßte. Somit sind φ_1 und φ_2 Decktransformationen von S , und wir erhalten nach (1.6)

$$S = (\varphi_1(M_1) \cap S) \cup (\varphi_2(M_2) \cap S) = \varphi_1(M_1 \cap S) \cup \varphi_2(M_2 \cap S) \subseteq \varphi_1(S \setminus H) \cup \varphi_2(S \setminus H).$$

Damit wäre S durch zwei offene Halbsphären überdeckt. Dieser Widerspruch belegt, daß eine Zerlegungsgleichheit $B(x, r) \stackrel{n}{\simeq} k \cdot B(x, r)$ mit $n < 3k-1$ unmöglich ist, also gilt $\deg(B(x, r), k \cdot B(x, r)) \geq 3k-1$. \square

Wir möchten hier noch anmerken, daß man in Analogie zur Betrachtung punktierter Kugeln die Zerlegungsgleichheit von $\mathbb{R}^3 \setminus \{x\}$ und $k \cdot (\mathbb{R}^3 \setminus \{x\})$ mit $\deg(\mathbb{R}^3 \setminus \{x\}, k \cdot (\mathbb{R}^3 \setminus \{x\})) = 2k$ für $x \in \mathbb{R}^3$ und $k \geq 2$ zeigen kann. Die Überlegungen zur Vollkugel können zum Beweis von $\mathbb{R}^3 \stackrel{3k-1}{\simeq} k \cdot \mathbb{R}^3$ ausgeweitet werden.

1.1.3 Eine Verallgemeinerung

Ziel dieses Abschnittes wird der Beweis einer verallgemeinerten Fassung des Multikongruenzsatzes von *S. Banach* und *A. Tarski* sein (Satz 1.12). Den mit dem klassischen Satz vertrauten Leser wird die Verallgemeinerung nicht überraschen. Im Kontext unserer Betrachtungen ist jedoch insbesondere die mit angegebene Anzahlabschätzung von Interesse. Der Beweis des Satzes wird auf der Überdeckbarkeit von Mengen mit Kugeln eines vorgegebenen Radius beruhen. Eine Größe zur Beschreibung optimaler derartiger Kugelüberdeckungen ist die *Kolmogoroffsche Entropiefunktion* $\mathcal{N}_r(M)$ (vgl. [Ko/Ti], S. 4). Für eine beschränkte Menge $M \subseteq \mathbb{R}^3$ und eine reelle Zahl $r > 0$ ist $\mathcal{N}_r(M)$ definiert gemäß

$$\mathcal{N}_r(M) = \min\{m \in \mathbb{N} : M \text{ ist durch } m \text{ abgeschlossene Kugeln vom Radius } r \text{ überdeckbar}\}.$$

Zunächst wollen wir eine Abschätzung der Minimalzahl $\mathcal{N}_r(M)$ herleiten.

Satz 1.10 *Es seien $M \subseteq \mathbb{R}^3$ eine beschränkte Menge mit Umkugelradius R und $r > 0$ eine reelle Zahl. Dann gilt*

$$\mathcal{N}_r(M) < \min \left\{ \left(\sqrt{3} \frac{R}{r} + 1 \right)^3, \frac{\sqrt{3}\pi}{2} \left(\frac{R}{r} + 2 \right)^3 \right\}.$$

Beweis: Es sei $B(x_0, R)$ die Umkugel von M . Zum Nachweis der ersten Abschätzung überdecken wir $B(x_0, R)$ durch einen Würfel W der Kantenlänge $2R$. Wir wählen $h \in \mathbb{N}$ so, daß $\sqrt{3} \frac{R}{r} \leq h < \sqrt{3} \frac{R}{r} + 1$. Offensichtlich ist W durch h^3 Würfel W_i , $1 \leq i \leq h^3$, der Kantenlänge $\frac{2R}{h}$ überdeckbar. Wegen $\frac{R}{h} \leq \frac{r}{\sqrt{3}}$ ist wiederum jeder Würfel W_i durch eine Kugel vom Radius r überdeckbar. Also gibt es h^3 Kugeln vom Radius r , die M überdecken. Deshalb gilt

$$\mathcal{N}_r(M) \leq h^3 < \left(\sqrt{3} \frac{R}{r} + 1 \right)^3.$$

Zur Verifikation der zweiten Schranke benutzen wir die Überdeckung des Raumes \mathbb{R}^3 durch gitterförmig angeordnete, paarweise innendisjunkte Würfel der Kantenlänge $\frac{2r}{\sqrt{3}}$. Offenbar bilden alle diejenigen Gitterwürfel, die mit der Umkugel $B(x_0, R)$ einen nichtleeren Durchschnitt haben, eine Überdeckung von M . Die Anzahl dieser Würfel sei j . Da alle diese Würfel in der Kugel $B(x_0, R + 2r)$ liegen, erhalten wir die Volumenabschätzung

$$j \cdot \left(\frac{2r}{\sqrt{3}} \right)^3 < \text{vol}(B(x_0, R + 2r)) = \frac{4\pi}{3}(R + 2r)^3.$$

Offensichtlich sind alle j Würfel von je einer Kugel mit Radius r überdeckbar, so daß

$$\mathcal{N}_r(M) \leq j < \left(\frac{\sqrt{3}}{2r} \right)^3 \cdot \frac{4\pi}{3} (R+2r)^3 = \frac{\sqrt{3}\pi}{2} \left(\frac{R}{r} + 2 \right)^3$$

gilt. Damit ist Satz 1.10 bewiesen. \square

Die beiden in Satz 1.10 angegebenen Schranken für $\mathcal{N}_r(M)$ hängen offenbar nur vom Quotienten $\frac{R}{r}$ ab. Man kann zeigen, daß das Minimum für $\frac{R}{r} \leq 5,3$ durch $(\sqrt{3}\frac{R}{r} + 1)^3$ und für $\frac{R}{r} \geq 5,4$ durch $\frac{\sqrt{3}\pi}{2} \left(\frac{R}{r} + 2 \right)^3$ gegeben ist. Bevor wir zur Verallgemeinerung des Satzes von *S. Banach* und *A. Tarski* kommen, wollen wir noch ein nützliches hinreichendes Kriterium für das Bestehen der Relation $a \stackrel{n}{\succeq} b$ für $a, b \in \langle 2^{R^3} \rangle$ herleiten.

Hilfssatz 1.11 *Es seien $a = A_1 + A_2 + \dots + A_k, b = B_1 + B_2 + \dots + B_l \in \langle 2^{R^3} \rangle$ und $n \in \mathbb{N}$. Wenn A_1 paarweise disjunkte Teilmengen M_1, M_2, \dots, M_n besitzt, so daß mit einer geeigneten Darstellung $n = s_1 + s_2 + \dots + s_l, s_j \in \mathbb{N}$, und geeigneten Bewegungen $\varphi_v \in B^3, 1 \leq v \leq n$, die Summanden $B_j, 1 \leq j \leq l$, gemäß*

$$B_j \subseteq \bigcup_{v=s_1+\dots+s_{j-1}+1}^{s_1+\dots+s_j} \varphi_v(M_v)$$

überdeckt werden können, dann gilt $a \stackrel{n}{\succeq} b$.

Beweis: Offensichtlich geben die obigen Überdeckungen der Summanden B_j bei geeigneter Wahl von Teilmengen $M'_v \subseteq M_v$ zu disjunkten Zerlegungen

$$B_j = \bigcup_{v=s_1+\dots+s_{j-1}+1}^{s_1+\dots+s_j} \varphi_v(M'_v)$$

Anlaß. Für die Menge $A'_1 = M'_1 \cup M'_2 \cup \dots \cup M'_n$ gilt deshalb $A'_1 \stackrel{n}{\simeq} b$. Setzen wir $A'_i = \emptyset$ für $2 \leq i \leq k$ und $a' = A'_1 + A'_2 + \dots + A'_k$, dann erhalten wir $a' \stackrel{n}{\simeq} b$ und entsprechend der Definition 1.4 schließlich die Behauptung $a \stackrel{n}{\succeq} b$. \square

Satz 1.12 *Es seien $a = A_1 + A_2 + \dots + A_k$ und $b = B_1 + B_2 + \dots + B_l$ Summen aus $\langle 2^{R^3} \rangle$ derart, daß alle Summanden A_i und B_j beschränkte Mengen sind, und daß jeweils mindestens ein Summand von a bzw. b innere Punkte enthält. Dann gilt $a \stackrel{*}{\simeq} b$.*

Sind r und s Radien von abgeschlossenen Inkugeln eines Summanden von a bzw. von b , dann gilt

$$\deg(a, b) \leq 3 \left(\sum_{i=1}^k \mathcal{N}_s(A_i) + \sum_{j=1}^l \mathcal{N}_r(B_j) \right) - 2.$$

Beweis: Wir gehen o.B.d.A. davon aus, daß die Kugel $B(x_a, r)$ Inkugel von A_1 ist. Nach Definition der Zahlen $\mathcal{N}_r(B_j)$ ist jeder Summand $B_j, 1 \leq j \leq l$, durch $\mathcal{N}_r(B_j)$

Translate der Kugel $B(x_a, r)$ überdeckbar. Wir setzen $h = \mathcal{N}_r(B_1) + \mathcal{N}_r(B_2) + \dots + \mathcal{N}_r(B_l)$. Es gibt also Translationen $\tau_v \in \mathcal{B}_3$, $1 \leq v \leq h$, die die Überdeckungen

$$B_j \subseteq \bigcup_{v=\mathcal{N}_r(B_1)+\dots+\mathcal{N}_r(B_{j-1})+1}^{\mathcal{N}_r(B_1)+\dots+\mathcal{N}_r(B_j)} \tau_v(B(x_a, r))$$

für $1 \leq j \leq l$ bewirken. Andererseits gilt gemäß Satz 1.9 die Relation $B(x_a, r) \stackrel{3h-1}{\simeq} h \cdot B(x_a, r)$, so daß es eine Zerlegung

$$B(x_a, r) = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_{3h-1},$$

eine Darstellung $3h-1 = r_1 + r_2 + \dots + r_h$ und Bewegungen φ_u , $1 \leq u \leq 3h-1$, gibt mit

$$B(x_a, r) = \bigcup_{u=r_1+\dots+r_{v-1}+1}^{r_1+\dots+r_v} \varphi_u(M_u)$$

für $1 \leq v \leq h$. Wir erhalten Überdeckungen

$$B_j \subseteq \bigcup_{v=\mathcal{N}_r(B_1)+\dots+\mathcal{N}_r(B_{j-1})+1}^{\mathcal{N}_r(B_1)+\dots+\mathcal{N}_r(B_j)} \bigcup_{u=r_1+\dots+r_{v-1}+1}^{r_1+\dots+r_v} \tau_v \varphi_u(M_u)$$

der Summanden B_j durch Bilder der $3h-1$ paarweise disjunkten Teilmengen M_u von A_1 . Mit Hilfssatz 1.11 folgt $a \stackrel{3h-1}{\succeq} b$. Nach Definition von h erhalten wir

$$a \stackrel{n}{\succeq} b \quad \text{mit} \quad n = 3 \left(\sum_{j=1}^l \mathcal{N}_r(B_j) \right) - 1.$$

Völlig analog ist die Relation

$$b \stackrel{m}{\succeq} a \quad \text{mit} \quad m = 3 \left(\sum_{i=1}^k \mathcal{N}_s(A_i) \right) - 1$$

zu zeigen. Nach Satz 1.5 folgt daraus $a \stackrel{m+n}{\simeq} b$ und damit insbesondere

$$\deg(a, b) \leq m + n = 3 \left(\sum_{i=1}^k \mathcal{N}_s(A_i) + \sum_{j=1}^l \mathcal{N}_r(B_j) \right) - 2.$$

Damit ist Satz 1.12 vollständig bewiesen. \square

Wir wollen nun noch zwei einfache Folgerungen aus Satz 1.12 angeben, die sich sofort aus Satz 1.10 ergeben. Die zweite Abschätzung ist etwas schwächer, aber leichter überschaubar.

Folgerung 1.13 *Es seien $a = A_1 + A_2 + \dots + A_k$ und $b = B_1 + B_2 + \dots + B_l$ Summen aus $\langle 2^{\mathbf{R}^3} \rangle$ derart, daß alle Summanden A_i und B_j beschränkte Mengen sind, und daß jeweils mindestens ein Summand von a bzw. b innere Punkte enthält. Sind r und s Radien von abgeschlossenen Inkugeln eines Summanden von a bzw. von*

b , und sind R_1, R_2, \dots, R_k und S_1, S_2, \dots, S_l die Umkugelradien der Summanden A_1, A_2, \dots, A_k bzw. B_1, B_2, \dots, B_l , dann gilt

$$\begin{aligned} \deg(a, b) < 3 \left(\sum_{i=1}^k \min \left\{ \left(\sqrt{3} \frac{R_i}{s} + 1 \right)^3, \frac{\sqrt{3}\pi}{2} \left(\frac{R_i}{s} + 2 \right)^3 \right\} + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^l \min \left\{ \left(\sqrt{3} \frac{S_j}{r} + 1 \right)^3, \frac{\sqrt{3}\pi}{2} \left(\frac{S_j}{r} + 2 \right)^3 \right\} \right) - 2. \quad \square \end{aligned}$$

Folgerung 1.14 *Es seien $a = A_1 + A_2 + \dots + A_k$ und $b = B_1 + B_2 + \dots + B_l$ Summen aus $\langle 2^{\mathbb{R}^3} \rangle$ derart, daß alle Summanden A_i und B_j beschränkte Mengen sind, und daß jeweils mindestens ein Summand von a bzw. b innere Punkte enthält. Sind r und s Radien von abgeschlossenen Inkugeln eines Summanden von a bzw. von b , und sind R und S jeweils der größte der Umkugelradien aller k Summanden von a bzw. aller l Summanden von b , dann gilt*

$$\begin{aligned} \deg(a, b) < 3 \left(k \cdot \min \left\{ \left(\sqrt{3} \frac{R}{s} + 1 \right)^3, \frac{\sqrt{3}\pi}{2} \left(\frac{R}{s} + 2 \right)^3 \right\} + \right. \\ \left. + l \cdot \min \left\{ \left(\sqrt{3} \frac{S}{r} + 1 \right)^3, \frac{\sqrt{3}\pi}{2} \left(\frac{S}{r} + 2 \right)^3 \right\} \right) - 2. \quad \square \end{aligned}$$

Wir möchten hier noch einmal auf die in [Ha] angegebene Schranke $\deg(A, B) \leq \left(1 + 2420 \left(\frac{R}{r}\right)^6\right)^2$ verweisen. Dabei waren r der Radius einer gemeinsamen Inkugel und R der Radius der gemeinsamen Umkugel der beiden beschränkten Mengen $A, B \subseteq \mathbb{R}^3$. Mit Hilfe von Folgerung 1.14 kann diese Abschätzung offenbar zu $\deg(A, B) < 6 \cdot \min \left\{ \left(\sqrt{3} \frac{R}{r} + 1 \right)^3, \frac{\sqrt{3}\pi}{2} \left(\frac{R}{r} + 2 \right)^3 \right\} - 2$ wesentlich verbessert werden.

1.2 Replikation von Mengen

1.2.1 Abschätzungen klassischer Art

Nach Satz 1.12 wissen wir bereits, daß jede beschränkte Menge $M \subseteq \mathbb{R}^3$ mit inneren Punkten die Relation $M \stackrel{*}{\simeq} k \cdot M$ für alle $k \geq 2$ erfüllt. Ist r der Radius einer abgeschlossenen Inkugel von M , dann gilt nach Satz 1.12 die Abschätzung

$$\deg(M, k \cdot M) \leq 3(k+1) \cdot \mathcal{N}_r(M) - 2. \quad (1.7)$$

Die folgenden Ausführungen dienen der Suche nach weiteren Abschätzungen der minimalen Teileanzahl $\deg(M, k \cdot M)$, die zur k -fachen Replikation von M benötigt werden. Leider werden wir für allgemeine Mengen M keine derart scharfen Aussagen wie in Satz 1.9 erhalten, denn die dortigen Resultate beruhen auf den Möglichkeiten, die die Decktransformationsgruppe der Kugel bereitstellt. Andere Mengen, beispielsweise der Würfel, dessen paradoxe Replizierbarkeit ja die Motivation für die Betrachtungen in diesem Kapitel lieferte, besitzen i.a. eine weitaus ärmere Decktransformationsgruppe.

In diesem Abschnitt wollen wir zunächst Schranken für $\deg(M, k \cdot M)$ finden, die ähnlich wie Satz 1.12 auf der Überdeckung von M mit Kugeln beruhen. Wir

sprechen dabei von Abschätzungen klassischer Art, weil derartige Überdeckungen auch in der Literatur beim Beweis des Multikongruenzsatzes von *S. Banach* und *A. Tarski* eine Rolle spielen.

Satz 1.15 *Es seien $M \subseteq \mathbb{R}^3$ eine beschränkte Menge mit inneren Punkten und $k \geq 2$ eine natürliche Zahl.*

(a) *Ist die Menge M durch m Translate einer abgeschlossenen Inkugel von M überdeckbar, dann gilt*

$$\deg(M, k \cdot M) \leq 3m(k-1) + 3.$$

(b) *Ist die Menge M durch m Translate einer punktierten abgeschlossenen Kugel, die Teilmenge von M ist, überdeckbar, dann gilt*

$$\deg(M, k \cdot M) \leq 2m(k-1) + 3.$$

Beweis: Es sei $B(x, r) \subseteq M$ eine abgeschlossene Inkugel von M , so daß M überdeckbar ist gemäß

$$M \subseteq \tau_1(B(x, r)) \cup \tau_2(B(x, r)) \cup \dots \cup \tau_m(B(x, r)) \quad (1.8)$$

mit geeigneten Translationen $\tau_i \in \mathcal{B}^3$. In Analogie zum Beweis von Satz 1.12 benutzen wir nun die nach Satz 1.9 bestehende Zerlegungsgleichheit $B(x, r) \stackrel{3m(k-1)+2}{\simeq} (m(k-1)+1) \cdot B(x, r)$. Wir erinnern uns genauer an die Struktur dieser Zerlegungsgleichheit, die durch die Formeln (1.3) und (1.4) aus dem Beweis von Satz 1.9 beschrieben wird. Demgemäß existieren eine Zerlegung

$$B(x, r) = A' \cup M_2 \cup M_3 \cup \dots \cup M_{3m(k-1)+2} \quad (1.9)$$

und Bewegungen $\varphi_u \in \mathcal{B}^3$, $2 \leq u \leq 3m(k-1)+2$, so daß

$$B(x, r) = A' \cup \varphi_2(M_2) \quad (1.10)$$

und

$$B(x, r) = \bigcup_{u=3v}^{3v+2} \varphi_u(M_u) \quad (1.11)$$

für $1 \leq v \leq m(k-1)$ gilt.

Wir setzen $M_1 = (M \setminus B(x, r)) \cup A'$. Nach (1.9) erhalten wir so die Zerlegung

$$M = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_{3m(k-1)+2}.$$

Nach (1.10) gibt es für den ersten Summanden M aus $k \cdot M$ die Darstellung

$$M = (M \setminus B(x, r)) \cup A' \cup \varphi_2(M_2) = M_1 \cup \varphi_2(M_2).$$

Die $k-1$ weiteren Summanden von $k \cdot M$ besitzen nach (1.8) und (1.11) die Überdeckungen

$$M \subseteq \bigcup_{i=1}^m \bigcup_{u=3((j-1)m+i)}^{3((j-1)m+i)+2} \tau_i \varphi_u(M_u)$$

für $1 \leq j \leq k-1$. Damit sind alle k Summanden von $k \cdot M$ durch Bilder der paarweise disjunkten Teilmengen $M_u \subseteq M$, $1 \leq u \leq 3m(k-1)+2$, überdeckt. Nach Hilfssatz 1.11 gilt somit $M \stackrel{3m(k-1)+2}{\succeq} k \cdot M$. Trivialerweise gilt auch $k \cdot M \stackrel{1}{\succeq} M$, so daß wir gemäß Satz 1.5 schließlich die Relation $M \stackrel{3m(k-1)+3}{\simeq} k \cdot M$ erhalten. Damit haben wir den ersten Teil von Satz 1.15 verifiziert.

Der Beweis von Teil (b) erfolgt völlig analog unter Ausnutzung der Aussage aus Satz 1.9 über die Vervielfachung von punktierten Kugeln. \square

Wir sehen, daß Satz 1.15 eine schärfere Aussage für die k -fache Replizierbarkeit von Mengen liefert als der allgemeinere Satz 1.12. Während Satz 1.12 nämlich die Abschätzung (1.7) erbrachte, bekommen wir mit Hilfe von Satz 1.15 die Verbesserung

$$\deg(M, k \cdot M) \leq 3(k-1) \cdot \mathcal{N}_r(M) + 3.$$

Unter Ausnutzung von Satz 1.10 erhalten wir leicht die folgende Aussage.

Folgerung 1.16 *Es seien $M \subseteq \mathbb{R}^3$ eine beschränkte Menge mit inneren Punkten und $k \geq 2$ eine natürliche Zahl. Sind r der Radius einer abgeschlossenen Inkugel und R der Umkugelradius von M , dann gilt*

$$\deg(M, k \cdot M) \leq 3(k-1) \cdot \min \left\{ \left(\sqrt{3} \frac{R}{r} + 1 \right)^3, \frac{\sqrt{3}\pi}{2} \left(\frac{R}{r} + 2 \right)^3 \right\} + 3. \quad \square$$

Es sei hier angemerkt, daß Satz 1.15 modifiziert werden kann, indem man in Teil (a) eine offene Inkugel bzw. in Teil (b) eine punktierte offene Kugel anstelle der entsprechenden abgeschlossenen Mengen benutzt. Die angegebenen Abschätzungen bleiben dabei richtig, da sie in völliger Analogie zu den oben bewiesenen Aussagen verifiziert werden können. Das modifizierte Kriterium kann für die Replikation von nicht abgeschlossenen Mengen von Vorteil sein, die eine offene Inkugel maximalen Durchmessers, aber keine größte abgeschlossene Inkugel besitzen.

1.2.2 Eine neuartige Abschätzung

Im Rahmen dieses Abschnittes werden wir den folgenden Satz beweisen und erste Folgerungen daraus ziehen.

Satz 1.17 *Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$ eine beschränkte Menge, deren Abschluß $\text{cl}(M)$ durch m \mathcal{B}^3 -Bilder ihres Inneren $\text{int}(M)$ überdeckbar ist. Dann gilt*

$$\deg(M, k \cdot M) \leq 2mk + 1$$

für alle natürlichen Zahlen $k \geq 2$.

Während in den bisherigen Abschätzungen immer die Überdeckbarkeit von M durch Translate von Inkugeln als Kriterium diente, geht es nun um die Überdeckbarkeit von $\text{cl}(M)$ durch Bilder von $\text{int}(M)$. Wir werden sehen, daß es viele Mengen M gibt, die eine Überdeckung von $\text{cl}(M)$ durch sehr wenige Bilder ihres Inneren

$\text{int}(M)$ erlauben, während relativ viele Translate von Inkugeln gebraucht werden, um M zu überdecken. Beispielsweise ist jede kompakte konvexe Menge $M \subseteq \mathbb{R}^3$ mit inneren Punkten, die einen glatten Rand besitzt, durch vier Translate von $\text{int}(M)$ überdeckbar (vgl. Satz 1.21). Da solche Mengen sehr langgestreckt sein können, werden dagegen i.a. sehr viele Translate von Inkugeln zur Überdeckung von M gebraucht. Man erkennt daran den Vorteil von Satz 1.17 gegenüber den klassischen Abschätzungen aus dem letzten Abschnitt. Wir wollen aber nicht verschweigen, daß bei manchen Mengen Satz 1.15 vorteilhaft sein kann. Z.B. ist die Vereinigung M zweier abgeschlossener Kugeln durch zwei Translate einer Inkugel überdeckbar, während man vier Bilder von $\text{int}(M)$ zur Überdeckung benötigt.

In Vorbereitung auf den Beweis von Satz 1.17 wollen wir zunächst zeigen, daß jede Menge M , die die Voraussetzungen von Satz 1.17 erfüllt, sogar durch m Bilder einer inneren Parallelmengens überdeckbar ist. Dabei verstehen wir unter der *inneren Parallelmengens von M zum Abstand $r > 0$* die Menge

$$M_{-r} = \{x \in M : B(x, r) \subseteq M\}.$$

Hilfssatz 1.18 *Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$ eine beschränkte Menge, deren Abschluß $\text{cl}(M)$ durch m \mathcal{B}^3 -Bilder ihres Inneren $\text{int}(M)$ überdeckbar ist. Dann gibt es eine Zahl $\varepsilon > 0$, so daß M durch m Bilder $\varphi_i(M_{-\varepsilon})$ der inneren Parallelmengens $M_{-\varepsilon}$, $\varphi_i \in \mathcal{B}^3$ für $1 \leq i \leq m$, überdeckt wird.*

Beweis: Nach Voraussetzung gibt es Bewegungen $\varphi_i \in \mathcal{B}^3$, $1 \leq i \leq m$, so daß

$$\text{cl}(M) \subseteq \varphi_1(\text{int}(M)) \cup \varphi_2(\text{int}(M)) \cup \dots \cup \varphi_m(\text{int}(M)).$$

Wir definieren die Funktion $f : \text{cl}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ für Punkte $x \in \text{cl}(M)$ gemäß

$$f(x) = \max_{1 \leq i \leq m} d(x, (\varphi_i(\text{int}(M)))^c).$$

Dabei bezeichne d die euklidische Metrik, $(\varphi_i(\text{int}(M)))^c$ das Komplement von $\varphi_i(\text{int}(M))$, und es sei

$$d(x, (\varphi_i(\text{int}(M)))^c) = \inf \{d(x, y) : y \in (\varphi_i(\text{int}(M)))^c\}.$$

Offensichtlich ist f stetig und nimmt deshalb auf dem Kompaktum $\text{cl}(M)$ sein Minimum δ an. Andererseits ist $f(x)$ für alle $x \in \text{cl}(M)$ positiv, also $\delta > 0$. Wir setzen $\varepsilon = \frac{\delta}{2}$. Dann gilt $f(x) > \varepsilon$ für alle $x \in \text{cl}(M)$.

Wir zeigen nun

$$M \subseteq \varphi_1(M_{-\varepsilon}) \cup \varphi_2(M_{-\varepsilon}) \cup \dots \cup \varphi_m(M_{-\varepsilon}).$$

Es sei dazu ein Punkt $x \in M$ fixiert. Wegen $f(x) > \varepsilon$ gibt es einen Index $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, so daß $d(x, (\varphi_i(\text{int}(M)))^c) > \varepsilon$. Folglich gilt $B(x, \varepsilon) \subseteq \varphi_i(\text{int}(M))$ und somit $x \in (\varphi_i(\text{int}(M)))_{-\varepsilon} = \varphi_i(\text{int}(M)_{-\varepsilon}) \subseteq \varphi_i(M_{-\varepsilon})$. Damit ist unsere Behauptung verifiziert. \square

Beweis von Satz 1.17: Nach Hilfssatz 1.18 gibt es eine Zahl $\varepsilon > 0$ und Bewegungen $\varphi_i \in \mathcal{B}^3$, $1 \leq i \leq m$, mit

$$M \subseteq \varphi_1(M_{-\varepsilon}) \cup \varphi_2(M_{-\varepsilon}) \cup \dots \cup \varphi_m(M_{-\varepsilon}). \quad (1.12)$$

Nun werden wir zeigen, daß es eine Zerlegung

$$M = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_{2mk}$$

von M und Bewegungen $\psi_u \in \mathcal{B}^3$, $1 \leq u \leq 2mk$, gibt, so daß die Inklusionen

$$M_{-\varepsilon} \subseteq \psi_{2j-1}(M_{2j-1}) \cup \psi_{2j}(M_{2j}) \quad \text{für} \quad 1 \leq j \leq mk \quad (1.13)$$

gelten. Dabei nehmen wir o.B.d.A. an, daß M Teilmenge der punktierten Kugel $B^p(0, 1)$ ist. Wir erinnern uns an den Beweis der Aussage über Sphären bzw. punktierte Kugeln aus Satz 1.9. Danach gibt es zu je zwei Drehungen $\rho, \sigma \in SO_3$, die eine freie nichtabelsche Gruppe vom Rang 2 erzeugen, Zerlegungen

$$B^p(0, 1) = A \cup B_{mk} \cup C_1 \cup C_2 \cup \dots \cup C_{mk-1} \cup D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_{mk-1}$$

sowie

$$\begin{aligned} B^p(0, 1) &= A \cup \rho^{mk-1}(B_{mk}) & \text{und} \\ B^p(0, 1) &= \rho^{j-1}(C_j) \cup \sigma \rho^{j-1}(D_j) & \text{für} \quad 1 \leq j \leq mk-1 \end{aligned}$$

der Kugel $B^p(0, 1)$ (vgl. Formeln (1.1) und (1.2)). Gemäß Lemma 1.8 können wir ρ und σ so wählen, daß die Drehungen ρ^{j-1} , $1 \leq j \leq mk$, und $\sigma \rho^{j-1}$, $1 \leq j \leq mk-1$, alle einen Drehwinkel haben, der kleiner als ε ist. Damit haben wir gezeigt: Es gibt Zerlegungen

$$B^p(0, 1) = H_1 \cup H_2 \cup \dots \cup H_{2mk} \quad (1.14)$$

und

$$B^p(0, 1) = \psi_{2j-1}(H_{2j-1}) \cup \psi_{2j}(H_{2j}) \quad \text{für} \quad 1 \leq j \leq mk, \quad (1.15)$$

wobei $\psi_u \in SO_3$, $1 \leq u \leq 2mk$, Drehungen sind, deren Drehwinkel jeweils kleiner als ε sind. Die Einschränkung der Drehwinkelgrößen sichert, daß $d(x, \psi_u^{-1}(x)) < \varepsilon$ für alle Punkte $x \in B^p(0, 1)$, insbesondere für $x \in M$, gilt. Daraus ergibt sich $M_{-\varepsilon} = \{x \in \mathbb{R}^3 : B(x, \varepsilon) \subseteq M\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^3 : \psi_u^{-1}(x) \in M\} = \psi_u(M)$, also

$$M_{-\varepsilon} \subseteq \psi_u(M) \quad \text{für} \quad 1 \leq u \leq 2mk. \quad (1.16)$$

Wir setzen nun $M_u = H_u \cap M$, $1 \leq u \leq 2mk$. Nach Formel (1.14) wird $M \subseteq B^p(0, 1)$ zerlegt gemäß

$$M = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_{2mk}.$$

Unter Ausnutzung von (1.15) und (1.16) erhalten wir Überdeckungen

$$\begin{aligned} M_{-\varepsilon} &= B^p(0, 1) \cap M_{-\varepsilon} \\ &= (\psi_{2j-1}(H_{2j-1}) \cup \psi_{2j}(H_{2j})) \cap M_{-\varepsilon} \\ &= (\psi_{2j-1}(H_{2j-1}) \cap M_{-\varepsilon}) \cup (\psi_{2j}(H_{2j}) \cap M_{-\varepsilon}) \\ &\subseteq (\psi_{2j-1}(H_{2j-1}) \cap \psi_{2j-1}(M)) \cup (\psi_{2j}(H_{2j}) \cap \psi_{2j}(M)) \\ &= \psi_{2j-1}(M_{2j-1}) \cup \psi_{2j}(M_{2j}) \end{aligned}$$

für $1 \leq j \leq mk$. Damit ist Formel (1.13) bewiesen.

Nach (1.12) und (1.13) gibt es Überdeckungen

$$M \subseteq \bigcup_{i=1}^m \left(\varphi_i \psi_{2(h-1)m+2i-1} (M_{2(h-1)m+2i-1}) \cup \varphi_i \psi_{2(h-1)m+2i} (M_{2(h-1)m+2i}) \right)$$

für $1 \leq h \leq k$. Die k Summanden von $k \cdot M$ werden also durch Bilder der paarweise disjunkten Teilmengen $M_u \subseteq M$, $1 \leq u \leq 2mk$, überdeckt. Nach Hilfssatz 1.11 folgt $M \stackrel{2mk}{\succeq} k \cdot M$. Trivialerweise gilt auch $k \cdot M \stackrel{1}{\succeq} M$, so daß wir nach Satz 1.5 schließlich $M \stackrel{2mk+1}{\simeq} k \cdot M$ erhalten. Damit ist Satz 1.17 bewiesen. \square

Das im Satz 1.17 als Kriterium benutzte Problem der Überdeckbarkeit von $\text{cl}(M)$ durch Bilder von $\text{int}(M)$ ist eng mit bekannten Fragestellungen der kombinatorischen Konvexgeometrie verwandt (vgl. [B/M/S], Kapitel 6, und dortige Referenzen): Für abgeschlossene konvexe Mengen K mit inneren Punkten wird einerseits nach der Minimalzahl $b(K)$ gefragt, so daß K durch $b(K)$ kleinere homothetische Bilder von K überdeckbar ist. Dies ist das Überdeckungsproblem von *I.Z. Gohberg*, *A.S. Markus* und *H. Hadwiger*. Andererseits stellte *F.W. Levi* die Frage nach der kleinsten Zahl $b'(K)$, so daß K durch $b'(K)$ Translate des Inneren $\text{int}(K)$ überdeckbar ist. Schließlich wird von *V.G. Boltyanski* nach der Minimalzahl $c(K)$ gefragt, so daß der Rand von K aus $c(K)$ Richtungen vollständig „beleuchtet“ werden kann. Wir benutzen die folgenden bekannten Resultate, um Folgerungen aus Satz 1.17 abzuleiten.

Satz 1.19 ([B/M/S], S. 262) *Für jede kompakte konvexe Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ mit inneren Punkten gilt: $b(K) = b'(K) = c(K)$.* \square

Satz 1.20 ([Las]) *Für jede kompakte konvexe Menge $K \subseteq \mathbb{R}^3$ mit inneren Punkten gilt: $b(K) \leq 20$.* \square

Satz 1.21 ([B/M/S], S. 277, 280) **(a)** *Für jede kompakte konvexe Punktmenge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ mit inneren Punkten, die höchstens n nichtreguläre Randpunkte besitzt, gilt: $c(K) = n + 1$.*

(b) *Für jede kompakte konvexe Menge $K \subseteq \mathbb{R}^3$ mit inneren Punkten, die höchstens vier nichtreguläre Randpunkte besitzt, gilt: $c(K) = 4$.* \square

Dabei verstehen die Autoren von [B/M/S] unter einem *regulären Randpunkt* einer konvexen Menge K einen Randpunkt, in dem K eine eindeutig bestimmte Tangentialhyperebene besitzt.

Im Zusammenhang mit Satz 1.17 ist natürlich vor allem die Zahl $b'(K)$ interessant. Ist $M \subseteq \mathbb{R}^3$ eine beschränkte konvexe Menge mit inneren Punkten, dann ist $\text{cl}(M)$ trivialerweise genau dann durch m Translate von $\text{int}(M)$ überdeckbar, wenn die kompakte Menge $K = \text{cl}(M)$ durch m Translate von $\text{int}(K)$ ($= \text{int}(M)$) überdeckt werden kann. Die obigen Sätze liefern also sogar Überdeckungskriterien für beschränkte konvexe Mengen M mit inneren Punkten. Für die Replizierbarkeit derartiger Mengen ergeben sich leicht die folgenden Konsequenzen.

Folgerung 1.22 Ist $M \subseteq \mathbb{R}^3$ eine beschränkte konvexe Menge mit inneren Punkten, dann gilt

$$\deg(M, k \cdot M) \leq 40k + 1$$

für alle natürlichen Zahlen $k \geq 2$. \square

Folgerung 1.23 Ist $M \subseteq \mathbb{R}^3$ eine beschränkte konvexe Menge mit inneren Punkten, die höchstens vier nichtreguläre Randpunkte besitzt, dann gilt

$$\deg(M, k \cdot M) \leq 8k + 1$$

für alle natürlichen Zahlen $k \geq 2$. \square

1.2.3 Ein Überdeckungslemma

Im letzten Abschnitt wurde deutlich, daß das Überdeckungskriterium aus Satz 1.17 zunächst für die Replizierbarkeit von konvexen Mengen interessante Aussagen liefert, die meistens dem Satz 1.15 überlegen sind. Wir wollen nun eine weitere Klasse von Mengen charakterisieren, für die Satz 1.17 Anwendung finden kann. Unsere Überlegungen finden zunächst im n -dimensionalen euklidischen Raum \mathbb{R}^n statt. Wir betrachten Mengen $M \subseteq \mathbb{R}^n$, die eine Darstellung als Minkowskisumme $M = N + K$ zulassen, wobei der Summand K beschränkt sei und innere Punkte besitze. Die Idee für die folgende Aussage lieferte Theorem 34.8 aus [B/M/S].

Lemma 1.24 Erlaubt $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Darstellung $M = N + K$ als Minkowskisumme zweier Mengen $N, K \subseteq \mathbb{R}^n$, wobei K beschränkt ist, und der Abschluß $\text{cl}(K)$ eine Überdeckung durch m Translate von $\text{int}(K)$ besitzt, dann ist auch $\text{cl}(M)$ durch m Translate von $\text{int}(M)$ überdeckbar.

Beweis: Man überzeugt sich leicht von den Inklusionen

$$\text{cl}(M) \subseteq \text{cl}(N) + \text{cl}(K) \quad \text{und} \quad \text{cl}(N) + \text{int}(K) \subseteq \text{int}(M) .$$

Desweiteren existieren nach Voraussetzung m Verschiebungsvektoren t_1, t_2, \dots, t_m mit $\text{cl}(K) \subseteq \bigcup_{i=1}^m (\text{int}(K) + t_i)$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \text{cl}(M) &\subseteq \text{cl}(N) + \text{cl}(K) \subseteq \text{cl}(N) + \left(\bigcup_{i=1}^m (\text{int}(K) + t_i) \right) \\ &= \bigcup_{i=1}^m \left((\text{cl}(N) + \text{int}(K)) + t_i \right) \subseteq \bigcup_{i=1}^m (\text{int}(M) + t_i) . \end{aligned}$$

Somit ist $\text{cl}(M)$ durch m Translate von $\text{int}(M)$ überdeckbar. \square

Ein wichtiger Typ der in Lemma 1.24 betrachteten Mengen ist durch die sogenannten (äußeren) Parallelmengen gegeben. Ist $N \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Punktmenge, so verstehen wir unter der (äußeren) Parallelmenge N_r von N zum Abstand $r > 0$ die Minkowskisumme

$$N_r = N + B(0, r) = \bigcup_{x \in N} B(x, r) .$$

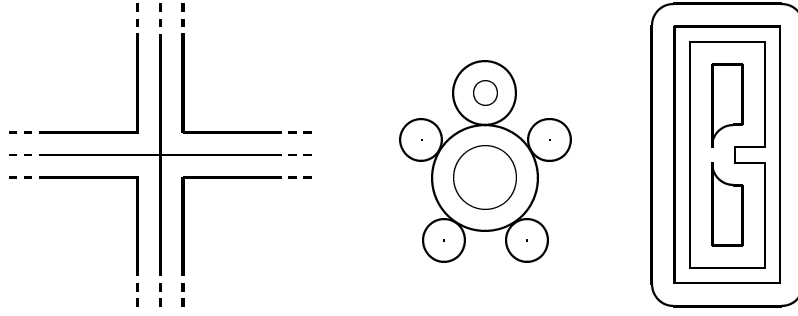


Abbildung 1.1: Einige Parallelmengen

Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ wird eine *Parallelmenge* genannt, wenn sie eine Darstellung $M = N_r$ mit geeigneten $N \subseteq \mathbb{R}^n$ und $r > 0$ besitzt. Abbildung 1.1 zeigt einige Parallelmengen in der Ebene \mathbb{R}^2 , um zu illustrieren, wie umfangreich diese Klasse von Mengen ist. Insbesondere ist auch die Vereinigung der dargestellten Mengen eine Parallelmenge.

Da jede Kugel $B(0, r) \subseteq \mathbb{R}^n$, $r > 0$, nach den Sätzen 1.19 und 1.21 eine Überdeckung durch $n + 1$ Translate ihres Inneren $\text{int}(B(0, r))$ zuläßt, erhalten wir für Parallelmengen $M = N_r = N + B(0, r)$ eine direkte Folgerung aus Lemma 1.24.

Folgerung 1.25 *Der Abschluß jeder Parallelmenge im Raum \mathbb{R}^n kann durch $n + 1$ Translate ihres Inneren überdeckt werden. \square*

Als Anwendung unserer Überlegungen im dreidimensionalen Fall erhalten wir eine weitere Folgerung aus Satz 1.17.

Folgerung 1.26 *Es sei $M = N + K$ eine Minkowskisumme zweier beschränkter Mengen $N, K \subseteq \mathbb{R}^3$, wobei der Abschluß $\text{cl}(K)$ eine Überdeckung durch m Translate von $\text{int}(K)$ besitze. Dann gilt*

$$\deg(M, k \cdot M) \leq 2mk + 1$$

für alle natürlichen Zahlen $k \geq 2$.

Insbesondere erlaubt jede beschränkte Parallelmenge $M \subseteq \mathbb{R}^3$ die Abschätzung

$$\deg(M, k \cdot M) \leq 8k + 1$$

für alle $k \geq 2$. \square

1.2.4 Die Vervielfachung des Würfels

Nach den allgemeinen Betrachtungen zur Replikation von Mengen wollen wir nun speziell auf die zerlegungstheoretische Version des Delischen Problems der Würfelverdoppelung zu sprechen kommen. Wir fragen also nach der Zahl $\deg(W, 2 \cdot W)$ für abgeschlossene Würfel $W \subseteq \mathbb{R}^3$. Zunächst untersuchen wir, welche Abschätzungen die bisherigen Aussagen liefern. Dabei sehen wir gleichzeitig exemplarisch, wie

aussagekräftig unsere allgemeinen Sätze sind. Um Satz 1.15 optimal ausnutzen zu können, benötigen wir Überdeckungen des Würfels mit minimal vielen Translaten einer Inkugel bzw. einer punktierten Inkugel.

Hilfssatz 1.27 *Jeder Würfel $W \subseteq \mathbb{R}^3$ ist durch acht Translate einer punktierten Inkugel überdeckbar. Eine Überdeckung durch sieben Translate einer vollen Inkugel gibt es nicht.*

Beweis: Wir betrachten den Würfel $W = [-1, 1]^3$. Man sieht leicht, daß W durch die acht punktierten Kugeln $B^p(x, 1)$, $x = (\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2})$, überdeckt wird.

Nun sei W durch m Vollkugeln vom Radius 1 überdeckt. Eine solche Kugel kann offenbar höchstens zwei Eckpunkte $x \in \text{vert}(W)$ enthalten. Also gilt $m = m_0 + m_1 + m_2$, wobei m_i , $0 \leq i \leq 2$, die Anzahl der Kugeln ist, die genau i Eckpunkte überdecken. Für $x \in \text{vert}(W)$ sei $h_1(x)$ die Anzahl der Kugeln, die x und sonst keinen weiteren Eckpunkt überdecken, und $h_2(x)$ die Anzahl der Kugeln, die x und noch einen weiteren Eckpunkt enthalten. Dann gilt offenbar

$$m \geq m_1 + m_2 = \sum_{x \in \text{vert}(W)} \left(h_1(x) + \frac{1}{2} h_2(x) \right).$$

Für jeden Punkt $x \in \text{vert}(W)$ gilt aber $h_1(x) \geq 1$ oder $h_2(x) = 3$, denn im Fall $h_1(x) = 0$ wird x und damit auch eine ganze Umgebung von x in W nur von Kugeln überdeckt, die neben x noch einen weiteren Eckpunkt enthalten. Derartige Kugeln besitzen immer eine der drei von x ausgehenden Würfelkanten als Durchmesser. Offenbar werden alle drei dieser Kugeln gebraucht, um eine Umgebung von x zu überdecken. Deshalb gilt $h_2(x) = 3$. Daraus ersehen wir, daß für alle Eckpunkte x gilt $h_1(x) + \frac{1}{2} h_2(x) \geq 1$. Die obige Abschätzung liefert damit

$$m \geq \sum_{x \in \text{vert}(W)} 1 = 8,$$

was zu zeigen war. (Genauer haben wir gezeigt, daß jede optimale Überdeckung aus acht Kugeln bestehen muß, die jeweils nur einen Eckpunkt des Würfels enthalten.) \square

Somit können wir Satz 1.15 mit $m = 8$ anwenden. Nach Teil (a) erhalten wir

$$\deg(W, k \cdot W) \leq 24(k-1) + 3 \quad \text{für} \quad k \geq 2,$$

speziell $\deg(W, 2 \cdot W) \leq 27$. Teil (b) liefert

$$\deg(W, k \cdot W) \leq 16(k-1) + 3 \quad \text{für} \quad k \geq 2,$$

insbesondere $\deg(W, 2 \cdot W) \leq 19$. Die schwächere Folgerung 1.16 ergibt dagegen mit $\frac{R}{r} = \sqrt{3}$ nur die Abschätzung

$$\deg(W, k \cdot W) \leq 192(k-1) + 3 \quad \text{für} \quad k \geq 2$$

und für die Würfelverdoppelung $\deg(W, 2 \cdot W) \leq 195$.

Die folgende Hilfsaussage wird zur Vorbereitung der Anwendung von Satz 1.17 benötigt. Später werden wir sie noch zum Beweis einer speziell auf den Würfel zugeschnittenen Aussage benutzen.

Hilfssatz 1.28 *Für jeden Würfel $W \subseteq \mathbb{R}^3$ der Kantenlänge s gibt es eine reelle Zahl $\varepsilon > 0$, so daß*

- (a) *W durch vier \mathcal{B}^3 -Bilder der inneren Parallelmenge $W_{-\varepsilon}$ überdeckbar ist, und*
- (b) *W durch zwei \mathcal{B}^3 -Bilder der inneren Parallellmenge $W_{-\varepsilon}$ und einen Quader der Kantenlängen $(s - 2\varepsilon) \times (s - 2\varepsilon) \times s$ überdeckt werden kann.*

Beweis: O.B.d.A. betrachten wir den Würfel $W = [-1, 1]^3$ mit $s = 2$. Wir setzen $\varepsilon = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$. Man überzeugt sich leicht davon, daß die vier Punkte $\frac{2\sqrt{2}}{3} \left(1, 1, -\frac{1}{2}\right)$, $\frac{2\sqrt{2}}{3} \left(\frac{1}{2}, -1, -1\right)$, $\frac{2\sqrt{2}}{3} \left(-1, -1, \frac{1}{2}\right)$ und $\frac{2\sqrt{2}}{3} \left(-\frac{1}{2}, 1, 1\right)$ Ecken eines Quadrates der Kantenlänge 2 sind, welches ganz im Würfel $\left[-\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right]^3 = W_{-3\varepsilon}$ liegt. Folglich liegt der Quader Q der Höhe 2ε , dessen Grundseite vom obigen Quadrat gebildet wird, ganz in der Parallelmenge $W_{-\varepsilon}$.

Zum Nachweis von (a) benutzen wir die Überdeckung

$$\begin{aligned} W &= [-1, 1 - 2\varepsilon]^3 \cup \left([1 - 2\varepsilon, 1] \times [-1, 1]^2\right) \cup \\ &\quad \cup \left([-1, 1] \times [1 - 2\varepsilon, 1] \times [-1, 1]\right) \cup \left([-1, 1]^2 \times [1 - 2\varepsilon, 1]\right). \end{aligned}$$

Die erste Menge ist ein Translat von $W_{-\varepsilon}$. Die drei weiteren Mengen sind wie Q Quader der Kantenlängen $2 \times 2 \times 2\varepsilon$ und werden deshalb von geeigneten Bildern von $W_{-\varepsilon}$ überdeckt.

Für (b) stellen wir fest, daß

$$\begin{aligned} W &= \left([-1, 1 - 2\varepsilon]^2 \times [-1, 1]\right) \cup \left([1 - 2\varepsilon, 1] \times [-1, 1]^2\right) \cup \\ &\quad \cup \left([-1, 1] \times [1 - 2\varepsilon, 1] \times [-1, 1]\right) \end{aligned}$$

gilt. Dabei ist die erste Menge ein Quader der Kantenlängen $(s - 2\varepsilon) \times (s - 2\varepsilon) \times s$, und die anderen beiden Quader werden wiederum von Bildern der inneren Parallelmenge $W_{-\varepsilon}$ überdeckt. \square

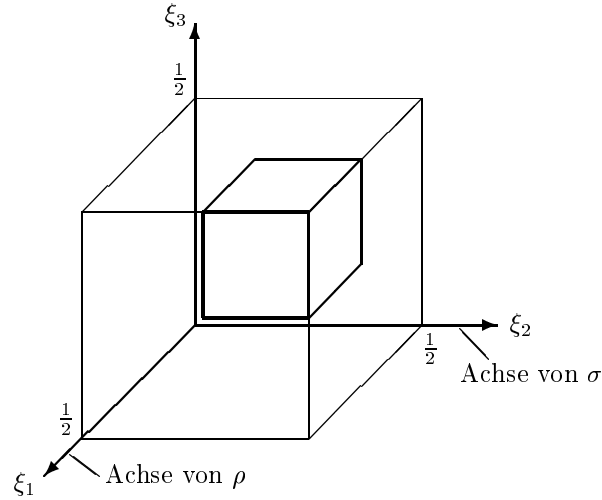
Wir erkennen insbesondere, daß jeder Würfel durch vier Bilder seines Inneren überdeckbar ist. Nach Satz 1.17 erhalten wir deshalb mit $m = 4$ die Abschätzung

$$\deg(W, k \cdot W) \leq 8k + 1 \quad \text{für} \quad k \geq 2 \quad (1.17)$$

und für die Würfelverdoppelung $\deg(W, 2 \cdot W) \leq 17$. Die Folgerung 1.22 ergibt dagegen nur

$$\deg(W, k \cdot W) \leq 40k + 1 \quad \text{für} \quad k \geq 2,$$

also $\deg(W, 2 \cdot W) \leq 81$. Die Folgerung 1.23 ist für die Replikation des Würfels W nicht anwendbar, da W unendlich viele nichtreguläre Randpunkte besitzt. Die Aussage von Folgerung 1.26 über Parallelmengen liefert ebenfalls keinen Beitrag für


 Abbildung 1.2: Lage von W im Raum

den Würfel. Natürlich kann man $W = N + K$ als Minkowskisumme darstellen, wobei die Summanden N und K wiederum Würfel sind. Offenbar werden dabei zur Überdeckung von K im Minimalfall $m = 8$ Translate von $\text{int}(K)$ benötigt. Folgerung 1.26 liefert dann

$$\deg(W, k \cdot W) \leq 16k + 1 \quad \text{für} \quad k \geq 2,$$

speziell $\deg(W, 2 \cdot W) \leq 33$.

Abschließend wollen wir einen Satz zur Vervielfachung des Würfels beweisen. Durch Ausnutzung der speziellen geometrischen Struktur des Würfels können wir die beste bisherige Abschätzung (1.17) noch leicht verbessern.

Satz 1.29 *Für jeden Würfel $W \subseteq \mathbb{R}^3$ und alle natürlichen Zahlen $k \geq 2$ gilt*

$$2k \leq \deg(W, k \cdot W) \leq 8k - 3.$$

Beweis: Die untere Abschätzung $2k \leq \deg(W, k \cdot W)$ erhält man durch analoge Argumentation wie bei $2k \leq \deg(S, k \cdot S)$ im Beweis von Satz 1.9.

Zur Herleitung der oberen Abschätzung wollen wir ähnlich wie im Beweis von Satz 1.17 vorgehen. Wir betrachten o.B.d.A. den Würfel $W = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]^3$, dessen Kanten achsenparallel verlaufen, und der Teilmenge der punktierten Einheitskugel $B^p(0, 1)$ ist (vgl. Abbildung 1.2). Für den Würfel W mit der Kantenlänge $s = \frac{1}{4}$ sei die Zahl ε gemäß Hilfssatz 1.28 gewählt, so daß es Bewegungen $\varphi_i \in \mathcal{B}^3$, $1 \leq i \leq 7$, gibt mit

$$W \subseteq \varphi_1(W_{-\varepsilon}) \cup \varphi_2(W_{-\varepsilon}) \cup \varphi_3(W_{-\varepsilon}) \cup \varphi_4(W_{-\varepsilon}) \quad (1.18)$$

und

$$W \subseteq \varphi_5\left([0, \frac{1}{4} - 2\varepsilon]^2 \times [0, \frac{1}{4}]\right) \cup \varphi_6(W_{-\varepsilon}) \cup \varphi_7(W_{-\varepsilon}). \quad (1.19)$$

Wir erinnern uns an den Beweis der Relation $B^p(0, 1) \stackrel{8k-4}{\simeq} (4k-2) \cdot B^p(0, 1)$ in Satz 1.9. Danach existieren zu je zwei Drehungen $\rho, \sigma \in SO_3$, die eine freie nichtabelsche Untergruppe vom Rang 2 erzeugen, Zerlegungen

$$B^p(0, 1) = A \cup B_{4k-2} \cup C_1 \cup \dots \cup C_{4k-3} \cup D_1 \cup \dots \cup D_{4k-3} \quad (1.20)$$

sowie

$$B^p(0, 1) = A \cup \rho^{4k-3}(B_{4k-2}), \quad B^p(0, 1) = C_1 \cup \sigma(D_1) \quad (1.21)$$

und

$$B^p(0, 1) = \rho^{j-1}(C_j) \cup \sigma \rho^{j-1}(D_j) \quad \text{für} \quad 2 \leq j \leq 4k-3 \quad (1.22)$$

der punktierten Kugel $B^p(0, 1)$ (vgl. Formeln (1.1) und (1.2)). Unter Ausnutzung von Lemma 1.8 wählen wir ρ und σ so, daß die Drehachsen von ρ und σ die ξ_1 - bzw. die ξ_2 -Achse des Koordinatensystems sind, und daß alle Drehungen ρ^{j-1} , $1 \leq j \leq 4k-2$, und $\sigma \rho^{j-1}$, $1 \leq j \leq 4k-3$, Drehwinkel haben, die kleiner als ε sind.

Wir setzen $M_1 = A \cap W$, $M_2 = B_{4k-2} \cap W$ und $M_{2j+1} = C_j \cap W$ bzw. $M_{2j+2} = D_j \cap W$ für $1 \leq j \leq 4k-3$. Gemäß (1.20) erhalten wir eine Zerlegung

$$W = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_{8k-4} \quad (1.23)$$

des Würfels W . Aus den Gleichungen (1.22) leiten wir wie im Beweis von Satz 1.17 unter Ausnutzung der Beschränktheit der Drehwinkel die Darstellungen

$$W_{-\varepsilon} \subseteq \rho^{j-1}(M_{2j+1}) \cup \sigma \rho^{j-1}(M_{2j+2}) \quad \text{für} \quad 2 \leq j \leq 4k-3 \quad (1.24)$$

ab. Nun zeigen wir, daß ein Quader der Kantenlängen $(\frac{1}{4} - 2\varepsilon) \times (\frac{1}{4} - 2\varepsilon) \times \frac{1}{4}$ von $M_1 \cup \rho^{4k-3}(M_2)$ überdeckt wird:

$$\left(\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right] \times \left[\frac{1}{4} + \varepsilon, \frac{1}{2} - \varepsilon \right]^2 \right) \subseteq M_1 \cup \rho^{4k-3}(M_2). \quad (1.25)$$

Da ρ^{4k-3} eine Rotation um die ξ_1 -Achse ist, deren Drehwinkel kleiner als ε ist, gilt offenbar $\left(\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right] \times \left[\frac{1}{4} + \varepsilon, \frac{1}{2} - \varepsilon \right]^2 \right) \subseteq \rho^{4k-3}(W)$. Unter Ausnutzung von (1.21) schließen wir daraus

$$\begin{aligned} \left(\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right] \times \left[\frac{1}{4} + \varepsilon, \frac{1}{2} - \varepsilon \right]^2 \right) &= B^p(0, 1) \cap \left(\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right] \times \left[\frac{1}{4} + \varepsilon, \frac{1}{2} - \varepsilon \right]^2 \right) \\ &= \left(A \cap \left(\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right] \times \left[\frac{1}{4} + \varepsilon, \frac{1}{2} - \varepsilon \right]^2 \right) \right) \cup \\ &\quad \cup \left(\rho^{4k-3}(B_{4k-2}) \cap \left(\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right] \times \left[\frac{1}{4} + \varepsilon, \frac{1}{2} - \varepsilon \right]^2 \right) \right) \\ &\subseteq (A \cap W) \cup (\rho^{4k-3}(B_{4k-2}) \cap \rho^{4k-3}(W)) \\ &= M_1 \cup \rho^{4k-3}(M_2), \end{aligned}$$

womit (1.25) bewiesen ist. Analog kann man aus der zweiten Gleichung von (1.21) die Beziehung

$$\left(\left[\frac{1}{4} + \varepsilon, \frac{1}{2} - \varepsilon \right] \times \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2} \right] \times \left[\frac{1}{4} + \varepsilon, \frac{1}{2} - \varepsilon \right] \right) \subseteq M_3 \cup \sigma(M_4) \quad (1.26)$$

ableiten.

Nun können wir die paarweise disjunkten Teilmengen $M_u \subseteq W$, $1 \leq u \leq 8k-4$, aus der Zerlegung (1.23) zur Überdeckung der k Summanden von $k \cdot W$ benutzen. Ist $\psi_1 \in \mathcal{B}^3$ eine Bewegung, die den Quader aus Formel (1.25) auf den gleichgroßen Quader aus (1.19) abbildet, dann gilt unter zusätzlicher Ausnutzung von (1.24)

$$W \subseteq \varphi_5 \psi_1(M_1) \cup \varphi_5 \psi_1 \rho^{4k-3}(M_2) \cup \varphi_6 \rho(M_5) \cup \varphi_6 \sigma \rho(M_6) \cup \varphi_7 \rho^2(M_7) \cup \varphi_7 \sigma \rho^2(M_8) .$$

Analog erhält man aus (1.19), (1.26) und (1.24) mit einer geeigneten Bewegung $\psi_2 \in \mathcal{B}^3$ die Überdeckung

$$W \subseteq \varphi_5 \psi_2(M_3) \cup \varphi_5 \psi_2 \sigma(M_4) \cup \varphi_6 \rho^3(M_9) \cup \varphi_6 \sigma \rho^3(M_{10}) \cup \varphi_7 \rho^4(M_{11}) \cup \varphi_7 \sigma \rho^4(M_{12}) .$$

Die verbleibenden $k-2$ Summanden von $k \cdot W$ erlauben nach (1.18) und (1.24) schließlich die Überdeckungen

$$W \subseteq \bigcup_{i=1}^4 \left(\varphi_i \rho^{4h+i}(M_{8h+2i+3}) \cup \varphi_i \sigma \rho^{4h+i}(M_{8h+2i+4}) \right)$$

für $1 \leq h \leq k-2$. Wir können nun Hilfssatz 1.11 anwenden und erhalten $W \stackrel{8k-4}{\succeq} k \cdot W$. Weiterhin gilt offensichtlich $k \cdot W \stackrel{1}{\succeq} W$, so daß nach Satz 1.5 die Relation $W \stackrel{8k-3}{\simeq} k \cdot W$ erfüllt ist. Damit ist die Abschätzung $\deg(W, k \cdot W) \leq 8k-3$ bewiesen. \square

Aus Satz 1.29 erhalten wir die schärfste uns bekannte Aussage über die minimale Teileanzahl bei der zerlegungstheoretischen Würfelverdoppelung:

$$4 \leq \deg(W, 2 \cdot W) \leq 13 . \quad (1.27)$$

1.2.5 Abschließende Bemerkungen

Abschließend möchten wir auf einige offene Probleme hinweisen. Obwohl wir verschiedene Abschätzungen für die minimal notwendige Teileanzahl bei der Vervielfachung von Mengen herleiten konnten – in den Abschnitten 1.2.2 und 1.2.3 fanden sogar Aussagen der modernen kombinatorischen Geometrie Anwendung –, bleibt die Frage nach den exakten Anzahlen offen. Insbesondere wurde auch die Frage nach der optimalen Zahl $\deg(W, 2 \cdot W)$ der Teile zur Würfelverdoppelung nur im Sinne von Formel (1.27) gelöst. Die benutzten Beweistechniken sind unseres Wissens mit der dort angegebenen oberen Schranke voll ausgeschöpft. Es drängt sich die Frage nach einer Verbesserung der trivialen unteren Abschätzung auf. Kann man ähnliche Methoden wie beim Beweis von $3k-1 \leq \deg(B(x, r), k \cdot B(x, r))$ in Satz 1.9 für die Replikation von Würfeln finden?

Kenner des *Banach-Tarski*-Paradoxons wissen, daß man für höhere Dimensionen leicht ähnliche Aussagen wie im dreidimensionalen Fall bekommen kann. Dagegen gibt es in der Ebene keine analogen Aussagen zur Multikongruenz, weil die Bewegungsgruppe \mathcal{B}^2 nicht reichhaltig genug ist. Dennoch gibt es auch im zweidimensionalen Fall interessante Aussagen zur Zerlegungsgleichheit. Das wohl prominenteste

Beispiel ist die eingangs erwähnte Quadratur des Kreises von *M. Laczkovich* unter Benutzung der Translationsgruppe. Auch hier könnte man nach der minimalen Anzahl der benötigten Teile fragen. Es müßten aber andere Techniken gefunden werden. Unsere Aussagen zum *Banach-Tarski*-Paradoxon im euklidischen Raum basieren alle auf der paradoxen Replizierbarkeit von (punktierten) Kugeln unter Benutzung einer überschaubaren Anzahl von Teilen (Satz 1.9). Zwar beruht diese Eigenschaft der Kugeln ebenso wie die Quadratur des Kreises nach *M. Laczkovich* auf dem Auswahlaxiom, aber das Vorgehen ist dennoch wesentlich konstruktiver. Dagegen gibt es bei der zerlegungstheoretischen Quadratur des Kreises keine elementaren Grundbausteine, deren Zerlegungsgleichheit hinsichtlich der Teileanzahl überschaubar ist, und auf deren Zerlegbarkeitseigenschaften die Behandlung anderer Mengen beruht.

Wie schon bei der Einführung der Grundbegriffe im Abschnitt 1.1.1 erwähnt wurde, kann man die Fragen zur Zerlegungsgleichheit auch in allgemeinen Räumen bezüglich gewisser dort wirkender Transformationsgruppen betrachten. Entsprechende gruppentheoretische Überlegungen findet man in [Wa2], gewisse abstrakte Abschätzungen zur optimalen Teileanzahl insbesondere im Kapitel 4. Derartige abstrakte Überlegungen hätten aber den Rahmen der vorliegenden Arbeit gesprengt. Hier wurde die Frage nach der Zerlegungsgleichheit insbesondere auch deswegen nur bezüglich der Bewegungsgruppe \mathcal{B}^3 behandelt, weil man die auftretenden Phänomene wirklich als paradox empfindet, wenn man das Hantieren mit geometrischen Objekten und euklidischen Bewegungen zunächst als physikalisch-mechanische Prozedur versteht. Nicht zuletzt dienen unsere Überlegungen der Erweiterung unseres Verständnisses der Bewegungsgruppe, mit der wir Vorgänge in unserem Anschauungsraum modellieren.

Im Sinne eines Ausblicks wollen wir dennoch eine besonders elegante Aussage erwähnen, die über die Überlegungen zur Gruppe \mathcal{B}^3 hinausgeht. Betrachtet man im Raum \mathbb{R}^n die Zerlegungsgleichheit bezüglich der Hauptgruppe \mathcal{H}^n der Ähnlichkeitsabbildungen, dann kann man ein viel weitgehendes Phänomen beobachten: *Je zwei beschränkte Mengen $A, B \in \mathbb{R}^n$, die innere Punkte besitzen, sind bezüglich \mathcal{H}^n zerlegungsgleich unter Benutzung von nur zwei Teilen* (vgl. [Wa2], S. 26). Dieser schöne Sachverhalt folgt leicht aus Satz 1.5, denn es gilt offensichtlich $A \stackrel{1}{\succeq} B$ und $B \stackrel{1}{\succeq} A$, wenn man Transformationen aus \mathcal{H}^n zuläßt.

Kapitel 2

Würfelzerlegungen und Approximation

Jede stetige reellwertige Funktion auf einem Intervall $[a, b]$ ist bekanntlich beliebig gut durch Polynome approximierbar. Welche „einfachen Funktionen“ stehen aber zur Approximation zur Verfügung, wenn das Intervall durch einen allgemeinen kompakten metrischen Raum (X, d) ersetzt wird? Eine Möglichkeit wird von *I. Stephani* in [Ste] vorgestellt: Dort werden Linearkombinationen von endlichen Funktionensystemen, sogenannten *kontrollierbaren Zerlegungen der Einheit*, als approximierende Funktionen benutzt. Aus Symmetriegründen sollen die Träger der Zerlegungsfunktionen eine Uniformitätsbedingung erfüllen, die eng mit der Geometrie des Raumes (X, d) zusammenhängt. Die Bedingung sichert, daß die Zerlegungsfunktionen Einflußgebiete etwa gleicher Größe besitzen. Der Raum X wird in diesem Sinne relativ gleichmäßig unterteilt.

Unsere Betrachtungen beziehen sich auf den n -dimensionalen Würfel. Hier wird in exemplarischer Weise deutlich, daß alle Ergebnisse zur o.g. Approximationstheorie fast ausschließlich auf geometrischen Überlegungen beruhen. Viele Resultate sind durchaus auch von selbständigem geometrischen Interesse. Nach einer exakten Einführung in die Theorie im Abschnitt 2.1.1 werden deshalb im folgenden Teil 2.1.2 zunächst nur Aussagen zur Geometrie der verwendeten Uniformitätsbedingung gesammelt. Abschnitt 2.1.3 dient der Charakterisierung einer Klasse von Funktionen auf dem Würfel, die einerseits eng mit dessen polyedrischer Struktur verknüpft und andererseits auch für die Approximationstheorie von wesentlicher Bedeutung ist. Im Teil 2.1.4 wird schließlich gezeigt, daß die für die Approximationstheorie zentrale Fehlerabschätzung in gewisser Weise optimal ist.

Im zweiten Teil des Kapitels wird eine modifizierte Theorie vorgestellt. Stetige Funktionen werden nun durch Treppenfunktionen angenähert, deren Träger wiederum die Bedingung der Kontrollierbarkeit erfüllen müssen. Wie wir sehen werden, ist die zu dieser Theorie gehörige Fehlerabschätzung in einem viel stärkeren Sinne

optimal. Am Ende unserer Überlegungen steht der Satz 2.19 über die Verfeinerbarkeit von beliebigen Quaderzerlegungen des Würfels zu Quaderzerlegungen, für die die Uniformitätsbedingung gilt. Dieser geometrische Sachverhalt impliziert einerseits durch iterative Anwendung die Existenz von aufsteigenden Ketten solcher kontrollierbarer Zerlegungen, die jeweils zu einem Approximationsschema Anlaß geben. Andererseits erkennen wir für das Intervall, also den eindimensionalen Würfel, daß das modifizierte Approximationsverfahren sogar zur Annäherung von unstetigen Funktionen eines wichtigen Typs benutzt werden kann.

2.1 Approximation mittels kontrollierbarer Zerlegungen der Einheit

2.1.1 Einführung

Es sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Die k -te Entropiezahl einer Teilmenge $M \subseteq X$ ist gegeben durch

$$\varepsilon_k(M) = \inf \left\{ \varepsilon > 0 : \text{es gibt Punkte } x_1, x_2, \dots, x_k \in X \text{ mit } M \subseteq \bigcup_{i=1}^k B(x_i, \varepsilon) \right\},$$

wobei $B(x_i, \varepsilon)$ die abgeschlossene Kugel um x_i vom Radius ε bezeichne (vgl. [Ca/Ste], S. 7). Dieser Entropiebegriff ist eng mit der im Abschnitt 1.1.3 eingeführten *Kolmogoroffschen Entropiefunktion* verwandt, nämlich $\mathcal{N}_\varepsilon(M) = k$ für $\varepsilon_k(M) \leq \varepsilon < \varepsilon_{k-1}(M)$, $k \geq 2$. Die Folge $(\varepsilon_k(M))_{k=1}^\infty$ ist offenbar für jede Menge M monoton fallend und strebt aufgrund der Kompaktheit von X gegen Null. Die erste Entropiezahl $\varepsilon_1(M)$ gibt insbesondere den *Radius* von M an.

Definition 2.1 Eine endliche Überdeckung $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \dots, U_k\}$ des kompakten metrischen Raumes X heißt *kontrollierbar*, falls $k = 1$ ist (triviale Überdeckung $\mathcal{U} = \{X\}$), oder

$$\varepsilon_1(U_i) < \varepsilon_{k-1}(X)$$

für alle $i = 1, 2, \dots, k$ gilt.

Diese Uniformitätsbedingung für die Elemente von Überdeckungen wurde von I. Stephani in [Ste] eingeführt. Mit Hilfe des Begriffes der *Feinheit* $F(\mathcal{U})$ einer Überdeckung $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \dots, U_k\}$,

$$F(\mathcal{U}) = \max_{i=1,2,\dots,k} \varepsilon_1(U_i),$$

kann die Kontrollierbarkeit etwas anschaulicher als eine Extremaleigenschaft beschrieben werden.

Hilfssatz 2.2 Für jede endliche Überdeckung \mathcal{U} eines kompakten metrischen Raumes X sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) \mathcal{U} ist kontrollierbar.

(ii) Keine Überdeckung \mathcal{V} von X mit einer Feinheit $F(\mathcal{V}) \leq F(\mathcal{U})$ besitzt weniger Elemente als \mathcal{U} .

Beweis: Es sei $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \dots, U_k\}$.

Zunächst verifizieren wir die Implikation $\neg(i) \Rightarrow \neg(ii)$. Für die Überdeckung \mathcal{U} gelte also $k \geq 2$ und $F(\mathcal{U}) \geq \varepsilon_{k-1}(X)$. Aufgrund der Definition von $\varepsilon_{k-1}(X)$ und wegen der Kompaktheit von X gibt es $k-1$ Kugeln $B(x_i, \varepsilon_{k-1}(X))$, die eine Überdeckung $\mathcal{V} = \{B(x_i, \varepsilon_{k-1}(X)) : 1 \leq i \leq k-1\}$ von X bilden. Dieses System \mathcal{V} belegt die Gültigkeit der Aussage $\neg(ii)$.

Zum Nachweis von $\neg(ii) \Rightarrow \neg(i)$ gehen wir von der Existenz einer Überdeckung $\mathcal{V} = \{V_1, V_2, \dots, V_l\}$ mit $F(\mathcal{V}) \leq F(\mathcal{U})$ und $l \leq k-1$ aus. Wegen $F(\mathcal{V}) \leq F(\mathcal{U})$ besitzt jede Menge V_j , $1 \leq j \leq l$, eine umschriebene Kugel $B(y_j, F(\mathcal{U}))$. Diese l Kugeln vom Radius $F(\mathcal{U})$ bilden somit eine Überdeckung von X , also $\varepsilon_l(X) \leq F(\mathcal{U})$. Damit erhalten wir

$$F(\mathcal{U}) \geq \varepsilon_l(X) \geq \varepsilon_{k-1}(X).$$

Die Überdeckung \mathcal{U} ist folglich nicht kontrollierbar. \square

Mit $C(X)$ bezeichnen wir den Banachraum aller stetigen reellwertigen Funktionen f auf X mit der Norm

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Zur Approximation von Funktionen aus $C(X)$ werden *Zerlegungen der Einheit* benutzt. Das sind endliche Systeme $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k\}$ stetiger Funktionen $\varphi_i \in C(X)$ mit

$$\varphi_i \geq 0 \quad \text{für} \quad 1 \leq i \leq k \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^k \varphi_i \equiv 1.$$

Die Träger

$$\text{supp}(\varphi_i) = \{x \in X : \varphi_i(x) \neq 0\}$$

der Zerlegungsfunktionen φ_i , $1 \leq i \leq k$, bilden offensichtlich eine Überdeckung von X durch offene Mengen. Deshalb kann der Kontrollierbarkeitsbegriff in naheliegender Weise auf Zerlegungen der Einheit ausgeweitet werden (vgl. [Ste]).

Definition 2.3 Eine Zerlegung der Einheit $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k\}$ auf einem kompakten metrischen Raum X heißt kontrollierbar, falls $k = 1$ ist (triviale Zerlegung der Einheit $\{\mathbf{1}_X\}$), oder

$$\varepsilon_1(\text{supp}(\varphi_i)) < \varepsilon_{k-1}(X)$$

für alle $i = 1, 2, \dots, k$ gilt.

Die Funktionen aus derartigen Zerlegungen der Einheit haben aufgrund der Uniformitätsbedingung etwa gleichgroße „Einflußgebiete“.

Natürlich stellt sich die Frage nach der Existenz kontrollierbarer Überdeckungen und kontrollierbarer Zerlegungen der Einheit. Später werden auch noch *kontrollierbare Zerlegungen von X* eine Rolle spielen. Das sind – im Gegensatz zu kontrollier-

baren Zerlegungen der Einheit – keine Funktionensysteme, sondern mengentheoretische Zerlegungen von X . Kontrollierbare Zerlegungen von X sind demnach spezielle kontrollierbare Überdeckungen.

Hilfssatz 2.4 *Es sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Für jede natürliche Zahl $k \geq 2$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

- (i) X besitzt eine kontrollierbare Überdeckung der Kardinalität k .
- (ii) X besitzt eine kontrollierbare Zerlegung der Kardinalität k .
- (iii) X besitzt eine kontrollierbare Zerlegung der Einheit der Kardinalität k .
- (iv) $\varepsilon_k(X) < \varepsilon_{k-1}(X)$. \square

Wir verzichten auf einen Beweis dieses Sachverhaltes, da die Äquivalenz von (iii) und (iv) bereits in [Ste] gezeigt wurde. Die verbleibenden Aussagen können völlig analog verifiziert werden.

Ist (X, d) ein unendlicher Raum, dann sind alle seine Entropiezahlen $\varepsilon_k(X)$ positiv, und die Nullfolge $(\varepsilon_k(X))_{k=1}^\infty$ besitzt deshalb unendlich viele Sprungstellen $\varepsilon_k(X) < \varepsilon_{k-1}(X)$. Die im Hilfssatz 2.4 angegebene Sprungbedingung ist also entsprechend häufig erfüllt. Im folgenden Abschnitt werden wir bei der Untersuchung n -dimensionaler Würfel jedoch exemplarisch erkennen, daß andererseits auch für sehr viele Indizes k die Gleichheit $\varepsilon_k(X) = \varepsilon_{k-1}(X)$ gelten kann.

Zur Approximation stetiger Funktionen werden die folgenden Funktionenklassen $\Phi_m(X) \subseteq C(X)$ benutzt:

$$\Phi_m(X) = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i \varphi_i : \lambda_i \in \mathbb{R}, \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k\} \text{ ist eine kontrollierbare Zerlegung der Einheit auf } X \text{ mit } k \leq m \right\}.$$

Das Approximationsschema $\Phi_1(X) \subseteq \Phi_2(X) \subseteq \Phi_3(X) \subseteq \dots \subseteq C(X)$ gibt vermöge der Definition

$$a_m(f) = \inf \{ \|f - \varphi\| : \varphi \in \Phi_m(X) \}$$

in kanonischer Weise zu einer monoton fallenden Folge von *Approximationszahlen* $a_1(f) \geq a_2(f) \geq a_3(f) \geq \dots \geq 0$ für jede stetige Funktion $f \in C(X)$ Anlaß.

Zur quantitativen Abschätzung der Fehlergrößen machen wir vom *Stetigkeitsmodul* $\omega(f, \cdot)$ der Funktionen $f \in C(X)$ Gebrauch. Dieser Modul ist für $\delta \geq 0$ gemäß

$$\omega(f, \delta) = \sup \{ |f(x) - f(y)| : x, y \in X, d(x, y) \leq \delta \}$$

erklärt. Man kann die Größe $\omega(f, \delta)$ analog auch für beliebige beschränkte reelle Funktionen f auf X definieren. Stetige Funktionen f werden durch die Eigenschaft $\lim_{\delta \rightarrow +0} \omega(f, \delta) = 0$ charakterisiert, wobei die Stärke der Nullstrebigkeit als ein Maß für die Güte der Stetigkeit von f dient. In Analogie zum klassischen Theorem von D. Jackson über die Approximation von stetigen Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$ durch Polynome (vgl. [Mei], S. 52ff) gilt folgende Aussage.

Satz 2.5 ([Ste]) *Ist (X, d) ein kompakter metrischer Raum, dann gilt für alle Funktionen $f \in C(X)$ und alle natürlichen Zahlen $m \geq 1$ die Abschätzung*

$$a_m(f) \leq \omega(f, \varepsilon_m(X)) . \quad \square$$

Wir erkennen daran insbesondere, daß die Vereinigung der Klassen Φ_m , $m \geq 1$, dicht in $C(X)$ liegt.

2.1.2 Kontrollierbarkeit und Gitter auf dem Würfel

Wir wollen unsere Betrachtungen nun auf den Raum $([0, 2]^n, d_{\max})$, also auf den mit der *Maximummetrik*

$$d_{\max}((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)) = \max_{k=1,2,\dots,n} |x_k - y_k|$$

versehenen n -dimensionalen Würfel $[0, 2]^n$, konzentrieren. Die Entropiezahlen dieses Raumes berechnen sich gemäß

$$\varepsilon_{l^n}([0, 2]^n) = \varepsilon_{l^{n+1}}([0, 2]^n) = \dots = \varepsilon_{(l+1)^{n-1}}([0, 2]^n) = \frac{1}{l} \quad (2.1)$$

für $l = 1, 2, 3, \dots$ (vgl. [Ba/Pi], [Bö/Ri]). Die Sprungbedingung aus Hilfssatz 2.4 ist somit nur für die Indizes $k = l^n$, $l \geq 2$, erfüllt. Demnach existieren kontrollierbare Überdeckungen, Zerlegungen bzw. Zerlegungen der Einheit des Würfels $[0, 2]^n$ genau zu den Kardinalitäten $k \in \{1^n, 2^n, 3^n, \dots\}$. Die Kontrollierbarkeitsbedingung für eine nichttriviale Überdeckung $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \dots, U_{l^n}\}$ der Kardinalität l^n , $l \geq 2$, hat die Gestalt

$$\varepsilon_1(U_i) < \frac{1}{l-1} \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \dots, l^n .$$

Die folgenden Überlegungen zeigen den engen Zusammenhang zwischen kontrollierbaren Überdeckungen (bzw. auch Zerlegungen und Zerlegungen der Einheit) und Gittern auf dem Würfel. Einige Betrachtungen dieser Art findet man bereits in [Bö] (Sätze 2.6 und 2.8) und in der Diplomarbeit [Ri1] (Satz 2.9). Dort werden die Aussagen allerdings nur für Kugelüberdeckungen formuliert. Der Vollständigkeit halber wollen wir die relativ kurzen Beweise hier dennoch ausführen. Wir werden im wesentlichen den Darstellungen aus [Ri2] folgen.

Für $l \geq 2$ sei das Gitter $G_{l^n} \subseteq [0, 2]^n$ gegeben gemäß

$$G_{l^n} = \{g[j_1, j_2, \dots, j_n] : (j_1, j_2, \dots, j_n) \in \{1, 2, \dots, l\}^n\}$$

mit

$$g[j_1, j_2, \dots, j_n] = \left(\frac{2(j_1-1)}{l-1}, \frac{2(j_2-1)}{l-1}, \dots, \frac{2(j_n-1)}{l-1} \right) .$$

Zunächst beobachten wir, daß die Mengen aus jeder l^n -elementigen kontrollierbaren Überdeckung nahezu gitterförmig angeordnet sind.

Satz 2.6 *Es sei \mathcal{U} eine l^n -elementige kontrollierbare Überdeckung des Raumes $([0, 2]^n, d_{\max})$ mit $l \geq 2$. Dann wird jeder Gitterpunkt aus G_{l^n} durch genau eine Menge aus \mathcal{U} überdeckt, und umgekehrt enthält jede Menge aus \mathcal{U} genau einen Punkt des Gitters G_{l^n} .*

Beweis: Wegen der Kontrollierbarkeit gilt $\varepsilon_1(U) < \varepsilon_{l^n-1}([0, 2]^n) = \frac{1}{l-1}$ für alle $U \in \mathcal{U}$. Also ist jede Menge U aus \mathcal{U} Teilmenge eines achsenparallel liegenden Würfels, dessen Kantenlänge kleiner als $\frac{2}{l-1}$ ist. Deshalb kann U höchstens einen der Gitterpunkte enthalten, deren paarweiser Abstand ja mindestens $\frac{2}{l-1}$ beträgt. Andererseits liegt aufgrund der Überdeckungseigenschaft jeder Punkt aus G_{l^n} in wenigstens einer Menge aus \mathcal{U} . Da \mathcal{U} und G_{l^n} von derselben Kardinalität sind, muß umgekehrt jede Menge aus \mathcal{U} mindestens einen Gitterpunkt enthalten, und jeder Gitterpunkt wird von höchstens einer Menge $U \in \mathcal{U}$ überdeckt. \square

Ist $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \dots, U_k\}$ eine Überdeckung von $[0, 2]^n$, dann bezeichnen wir mit $S(\mathcal{U})$ die Menge aller Punkte des Würfels $[0, 2]^n$, die jeweils nur in einer Überdeckungsmenge $U \in \mathcal{U}$ enthalten sind:

$$S(\mathcal{U}) = \bigcup_{i=1}^k \left(U_i \setminus \bigcup_{j \in \{1, 2, \dots, k\} \setminus \{i\}} U_j \right).$$

Wir können die durch kontrollierbare Überdeckungen \mathcal{U} der Kardinalität l^n *einfach überdeckten Mengen* $S(\mathcal{U})$ zur Charakterisierung des Gitters G_{l^n} heranziehen.

Satz 2.7 *Für alle natürlichen Zahlen $l \geq 2$ gilt:*

$$G_{l^n} = \bigcap_{\substack{\mathcal{U} \text{ ist eine kontrollierbare Überdek-} \\ \text{kung von } [0, 2]^n \text{ mit } \text{card}(\mathcal{U}) = l^n}} S(\mathcal{U}).$$

Beweis: Nach Satz 2.6 gilt die Inklusion „ \subseteq “. Zum Nachweis von „ \supseteq “ zeigen wir, daß für jeden Punkt $x \in [0, 2]^n \setminus G_{l^n}$ eine geeignete kontrollierbare Überdeckung \mathcal{U} der Kardinalität l^n existiert, so daß $x \notin S(\mathcal{U})$.

Es sei also $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in [0, 2]^n \setminus G_{l^n}$ fixiert. Da x kein Gitterpunkt ist, gibt es einen Koordinatenindex $k_0 \in \{1, 2, \dots, n\}$, so daß

$$\frac{2(j_{k_0} - 1)}{l - 1} < x_{k_0} < \frac{2j_{k_0}}{l - 1} \quad \text{für ein} \quad j_{k_0} \in \{1, 2, \dots, l - 1\} \quad (2.2)$$

gilt. Wir wählen eine Zahl $\varepsilon > 0$ gemäß

$$4(l - 1)\varepsilon = \min \left\{ x_{k_0} - \frac{2(j_{k_0} - 1)}{l - 1}, \frac{2j_{k_0}}{l - 1} - x_{k_0} \right\}. \quad (2.3)$$

Weiterhin definieren wir für $1 \leq j \leq l$ Intervalle

$$I_j = \begin{cases} \left[0, \frac{2}{l-1} - 4\varepsilon + \varepsilon \right) & , \quad j = 1, \\ \left(\frac{2(j-1)}{l-1} - 4(j-1)\varepsilon - \varepsilon, \frac{2j}{l-1} - 4j\varepsilon + \varepsilon \right) & , \quad 1 < j \leq j_{k_0}, \\ \left(\frac{2(j-2)}{l-1} + 4(l - (j-1))\varepsilon - \varepsilon, \frac{2(j-1)}{l-1} + 4(l-j)\varepsilon + \varepsilon \right) & , \quad j_{k_0} < j < l, \\ \left(\frac{2(l-2)}{l-1} + 4\varepsilon - \varepsilon, 2 \right] & , \quad j = l. \end{cases}$$

Unter Ausnutzung von (2.2) und (2.3) erhalten wir damit die Inklusionen

$$\begin{aligned} x_{k_0} &\in \left[\frac{2(j_{k_0} - 1)}{l - 1}, x_{k_0} \right] = \left[\frac{2(j_{k_0} - 1)}{l - 1}, \frac{2j_{k_0}}{l - 1} - \left(\frac{2j_{k_0}}{l - 1} - x_{k_0} \right) \right] \\ &\subseteq \left[\frac{2(j_{k_0} - 1)}{l - 1}, \frac{2j_{k_0}}{l - 1} - 4(l - 1)\varepsilon \right] \subseteq \left[\frac{2(j_{k_0} - 1)}{l - 1}, \frac{2j_{k_0}}{l - 1} - 4j_{k_0}\varepsilon \right] \subseteq I_{j_{k_0}} \end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned} x_{k_0} &\in \left[x_{k_0}, \frac{2j_{k_0}}{l - 1} \right] = \left[\frac{2(j_{k_0} - 1)}{l - 1} + \left(x_{k_0} - \frac{2(j_{k_0} - 1)}{l - 1} \right), \frac{2j_{k_0}}{l - 1} \right] \\ &\subseteq \left[\frac{2(j_{k_0} - 1)}{l - 1} + 4(l - 1)\varepsilon, \frac{2j_{k_0}}{l - 1} \right] \subseteq \left[\frac{2(j_{k_0} - 1)}{l - 1} + 4(l - j_{k_0})\varepsilon, \frac{2j_{k_0}}{l - 1} \right] \\ &\subseteq I_{j_{k_0} + 1} . \end{aligned}$$

Damit gilt

$$x_{k_0} \in I_{j_{k_0}} \cap I_{j_{k_0} + 1} . \quad (2.4)$$

Insbesondere bedeutet dies, daß sich die Intervalle $I_{j_{k_0}}$ und $I_{j_{k_0} + 1}$ überlappen. Für $j \in \{1, 2, \dots, l - 1\} \setminus \{j_{k_0}\}$ gibt es offenbar auch eine Überlappung von I_j und I_{j+1} . Deshalb gilt

$$[0, 2] = I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_l . \quad (2.5)$$

Wir definieren

$$U_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} = I_{j_1} \times I_{j_2} \times \dots \times I_{j_n}$$

für $(j_1, j_2, \dots, j_n) \in \{1, 2, \dots, l\}^n$ und erhalten vermöge

$$\mathcal{U} = \{ U_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} : (j_1, j_2, \dots, j_n) \in \{1, 2, \dots, l\}^n \}$$

offenbar eine l^n -elementige Überdeckung \mathcal{U} von $[0, 2]^n$. Die Mengen $U \in \mathcal{U}$ sind achsenparallele Quader, deren Kantenlängen aufgrund der Definition der Intervalle I_j nicht größer als $\frac{2}{l-1} - 2\varepsilon$ sind. Für die Entropiezahlen gilt somit

$$\varepsilon_1(U) \leq \frac{1}{l-1} - \varepsilon < \frac{1}{l-1} = \varepsilon_{l^n-1}([0, 2]^n) ;$$

also ist \mathcal{U} eine kontrollierbare Überdeckung. Wegen (2.5) gibt es für alle Koordinatenindizes $k \neq k_0$ ein Intervall I_{j_k} mit $x_k \in I_{j_k}$. Unter Ausnutzung von (2.4) gilt demnach

$$x \in U_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} \cap U_{(j_1, j_2, \dots, j_{k_0-1}, j_{k_0}+1, j_{k_0}+1, j_{k_0}+2, \dots, j_n)} .$$

Der Punkt x gehört somit nicht zur Menge $S(\mathcal{U})$, was zu zeigen war.

(Die hier konstruierte Überdeckung \mathcal{U} besteht nur aus offenen Kugeln vom Radius $\frac{1}{l-1} - \varepsilon$. Man könnte Satz 2.7 also auch schärfer formulieren, indem man die Durchschnittsbildung auf kontrollierbare Überdeckungen mit offenen Kugeln vom

gleichen Radius einschränkt.) \square^1

Der Durchschnitt der einfach überdeckten Mengen $S(\mathcal{U})$ aller l^n -elementigen kontrollierbaren Überdeckungen \mathcal{U} des Würfels $[0, 2]^n$ ist nach Satz 2.7 das Gitter G_{l^n} – also eine Menge vom Lebesguemaß Null. Dagegen belegt die folgende Aussage, daß die Menge $S(\mathcal{U})$ für eine einzelne kontrollierbare Überdeckung \mathcal{U} den Würfel bis auf einen Rest von einem beliebig klein vorgebbaren positiven Maß vollständig überdeckt, wenn nur die Kardinalität von \mathcal{U} hinreichend groß gewählt ist. Das Maß der einfach überdeckten Mengen $\nu(S(\mathcal{U}_m))$ einer Folge kontrollierbarer Überdeckungen \mathcal{U}_m streng wachsender Kardinalität strebt deshalb gegen das Maß $2^n = \nu([0, 2]^n)$ des Würfels, sofern die Überdeckungen aus meßbaren Mengen bestehen.

Satz 2.8 *Es sei \mathcal{U} eine l^n -elementige kontrollierbare Überdeckung von $[0, 2]^n$ durch meßbare Mengen mit $l \geq 2$. Dann gilt für das Lebesguemaß der zugehörigen einfach überdeckten Menge $S(\mathcal{U})$:*

$$\nu(S(\mathcal{U})) > \left(2 - \left(\frac{l}{l-1}\right)^n\right) \cdot \nu([0, 2]^n).$$

Beweis: Es sei $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \dots, U_{l^n}\}$. Um alle Punkte des Würfels $[0, 2]^n$ wenigstens einfach zu überdecken, braucht man zunächst Mengen vom Gesamtmaß $\nu([0, 2]^n) = 2^n$. Das Maß $\nu([0, 2]^n \setminus S(\mathcal{U}))$ der Menge aller Punkte, die mehrfach überdeckt sind, kann also nicht größer sein als die Differenz zwischen der Summe $\sum_{i=1}^{l^n} \nu(U_i)$ der Maße aller Überdeckungsmengen und dem Maß 2^n des Würfels:

$$\nu([0, 2]^n \setminus S(\mathcal{U})) \leq \sum_{i=1}^{l^n} \nu(U_i) - 2^n.$$

Wegen der Kontrollierbarkeit ist jede Menge U_i in einem Würfel enthalten, dessen Kantenlänge kleiner als $\frac{2}{l-1}$ ist. Es gilt somit $\nu(U_i) < \left(\frac{2}{l-1}\right)^n$, und wir erhalten

$$\nu([0, 2]^n \setminus S(\mathcal{U})) < l^n \left(\frac{2}{l-1}\right)^n - 2^n = \left(\left(\frac{l}{l-1}\right)^n - 1\right) \cdot \nu([0, 2]^n).$$

Daraus folgt

$$\nu(S(\mathcal{U})) = \nu([0, 2]^n) - \nu([0, 2]^n \setminus S(\mathcal{U})) > \left(2 - \left(\frac{l}{l-1}\right)^n\right) \cdot \nu([0, 2]^n),$$

¹Satz 2.7 besagt, daß man als Durchschnitt der einfach überdeckten Mengen aller (nichttrivialen) kontrollierbaren Überdeckungen einer festen Kardinalität ein Gitter auf $[0, 2]^n$ erhält. Es stellt sich die Frage, ob man mit kontrollierbaren Überdeckungen anderer kompakter metrischer Räume (X, d) in ähnlicher Weise Schnittmengen erzeugen kann, um zu einem verallgemeinerten Gitterbegriff zu gelangen. Betrachtet man jedoch beispielsweise als Raum (X, d) eine n -dimensionale abgeschlossene euklidische Kugel mit der euklidischen Metrik, dann ist der Schnitt der einfach überdeckten Mengen aller $(n+1)$ -elementigen kontrollierbaren Überdeckungen leer. Eine kanonische Verallgemeinerung des Gitterbegriffs ist auf diese einfache Weise offenbar nicht zu erhalten.

Dagegen erhält man für das Cantorsche Diskontinuum ähnlich wie beim Würfel kanonische Schnittmengen. Die Frage, für welche Räume bzw. mit welchen modifizierten Formulierungen ein Analogon zu Satz 2.7 gilt, bleibt also von Interesse. Antworten darauf müssen wir jedoch schuldig bleiben.

was zu zeigen war. \square

Wir wollen nun zeigen, daß jede kontrollierbare Überdeckung des Würfels $[0, 2]^n$ in kanonischer Weise kontrollierbare Überdeckungen auf allen k -Facetten von $[0, 2]^n$ induziert.

Satz 2.9 *Es seien \mathcal{U} eine l^n -elementige kontrollierbare Überdeckung des Würfels $[0, 2]^n$, $l \geq 1$, und F eine abgeschlossene k -Facette von $[0, 2]^n$, $1 \leq k \leq n-1$. Dann ist*

$$\mathcal{U}_F = \{U \cap F : U \in \mathcal{U}, U \cap F \neq \emptyset\}$$

eine kontrollierbare Überdeckung des eingeschränkten Raumes (F, d_{\max}) von der Kardinalität $\text{card}(\mathcal{U}_F) = l^k$.

Beweis: Im Fall $l = 1$ liegt die Überdeckung $\mathcal{U} = \{[0, 2]^n\}$ vor, und die Aussage ist trivial. Es sei nun $l \geq 2$. Wegen der nach Satz 2.6 bestehenden kanonischen Bijektion zwischen \mathcal{U} und dem Gitter G_{l^n} können wir

$$\mathcal{U} = \{U_{(j_1, j_2, \dots, j_n)} : (j_1, j_2, \dots, j_n) \in \{1, 2, \dots, l\}^n\}$$

schreiben, wobei

$$g[j_1, j_2, \dots, j_n] \in U_{(j_1, j_2, \dots, j_n)}.$$

Im Sinne einer Induktion beschränken wir uns auf den Beweis der Aussage für $k = n-1$. O.B.d.A. betrachten wir die Würfelseite $F = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in [0, 2]^n : x_n = 0\}$. Offenbar schneiden sich $U_{(j_1, j_2, \dots, j_n)}$ und F genau im Fall $j_n = 1$; denn einerseits gilt $g[j_1, j_2, \dots, j_{n-1}, 1] \in U_{(j_1, j_2, \dots, j_{n-1}, 1)} \cap F$. Andererseits enthält jede Menge $U_{(j_1, j_2, \dots, j_n)}$ mit $j_n > 1$ einen Gitterpunkt $g[j_1, j_2, \dots, j_n]$, dessen n -te Koordinate wenigstens $\frac{2}{l-1}$ ist. Da $U_{(j_1, j_2, \dots, j_n)}$ wegen der Kontrollierbarkeit in einem achsenparallelen Würfel liegt, dessen Kantenlänge kleiner als $\frac{2}{l-1}$ ist, sind $U_{(j_1, j_2, \dots, j_n)}$ und F disjunkt. Demnach gilt

$$\mathcal{U}_F = \{U_{(j_1, j_2, \dots, j_{n-1}, 1)} \cap F : (j_1, j_2, \dots, j_{n-1}) \in \{1, 2, \dots, l\}^{n-1}\}.$$

Es liegt also eine $l^{(n-1)}$ -elementige Überdeckung von F vor. Bezeichnen wir die Entropiezahlen bezüglich des Raumes (F, d_{\max}) mit $\varepsilon_i|_F(\cdot)$, so erhalten wir

$$\varepsilon_1|_F(U_{(j_1, j_2, \dots, j_{n-1}, 1)} \cap F) \leq \varepsilon_1(U_{(j_1, j_2, \dots, j_{n-1}, 1)}) < \frac{1}{l-1} = \varepsilon_{l^{(n-1)}-1}|_F(F).$$

Die Überdeckung \mathcal{U}_F von F ist somit kontrollierbar. \square

Natürlich führen kontrollierbare Zerlegungen der Einheit in $C([0, 2]^n)$ und kontrollierbare Zerlegungen von $[0, 2]^n$ in analoger Weise zu kontrollierbaren Zerlegungen der Einheit auf den Facetten bzw. zu kontrollierbaren Zerlegungen der Facetten von $[0, 2]^n$. In diesem Sinne wird Satz 2.9 Anwendung finden.

Schließlich wollen wir noch zwei Hilfssätze präsentieren. Die erste Aussage bezieht sich auf kontrollierbare Überdeckungen im eindimensionalen Fall. Sie soll später beim Beweis einer Optimalitätsaussage zur Fehlerabschätzung aus Satz 2.5 benutzt werden.

Hilfssatz 2.10 *Es sei \mathcal{U} eine l -elementige kontrollierbare Überdeckung des Intervalls $[0, 2]$ durch meßbare Mengen mit $l \geq 3$. Dann gibt es eine Menge $U_0 \in \mathcal{U}$ und zwei Punkte $y_1, y_2 \in U_0$, die in keiner anderen Überdeckungsmenge aus \mathcal{U} enthalten sind, so daß gilt:*

$$|y_1 - y_2| \geq 2 \frac{l-2}{(l-1)(l+2)} \quad \text{und} \quad |y_1 - y_2| \geq \frac{1}{4} \quad \text{für} \quad l = 3 \quad (2.6)$$

sowie

$$y_1, y_2 \in [0, 1] \quad \text{oder} \quad y_1, y_2 \in [1, 2]. \quad (2.7)$$

Beweis: Wir nutzen das eindimensionale Gitter $G_l = \{g[1], g[2], \dots, g[l]\} \subseteq [0, 2]$. Nach Satz 2.6 besitzt die Überdeckung \mathcal{U} die Darstellung $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \dots, U_l\}$ mit $\frac{2(j-1)}{l-1} = g[j] \in U_j$. Wegen der Kontrollierbarkeit von \mathcal{U} gilt $\varepsilon_1(U_j) < \frac{1}{l-1}$. Daraus folgt $U_j \subseteq (\frac{2(j-2)}{l-1}, \frac{2j}{l-1})$ und somit

$$U_1, U_2, \dots, U_h \subseteq [0, 1] \quad \text{und} \quad U_{h+2}, U_{h+3}, \dots, U_l \subseteq [1, 2] \quad \text{für} \quad l = 2h + 1 \quad (2.8)$$

bzw.

$$U_1, U_2, \dots, U_{h-1} \subseteq [0, 1] \quad \text{und} \quad U_{h+2}, U_{h+3}, \dots, U_l \subseteq [1, 2] \quad \text{für} \quad l = 2h. \quad (2.9)$$

Die Menge $S(\mathcal{U})$ der von \mathcal{U} einfach überdeckten Punkte ist als disjunkte Vereinigung $S(\mathcal{U}) = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_l$ darstellbar, wobei

$$S_j = U_j \setminus (U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_{j-1} \cup U_{j+1} \cup U_{j+2} \cup \dots \cup U_l). \quad (2.10)$$

Nach Satz 2.8 folgt

$$\nu(S_1) + \nu(S_2) + \dots + \nu(S_l) = \nu(S) > \left(2 - \frac{l}{l-1}\right) \cdot \nu([0, 2]) = 2 \frac{l-2}{l-1}.$$

Demnach existiert ein Index $j_0 \in \{1, 2, \dots, l\}$ mit

$$\nu(S_{j_0}) > 2 \frac{l-2}{(l-1)(l+1)} \quad \text{und} \quad j_0 \neq h+1 \quad \text{oder} \quad (2.11)$$

$$\nu(S_{j_0}) > 2 \frac{2(l-2)}{(l-1)(l+1)} \quad \text{und} \quad j_0 = h+1 \quad (2.12)$$

im Fall $l = 2h + 1$ bzw.

$$\nu(S_{j_0}) > 2 \frac{l-2}{(l-1)(l+2)} \quad \text{und} \quad j_0 \notin \{h, h+1\} \quad \text{oder} \quad (2.13)$$

$$\nu(S_{j_0}) > 2 \frac{2(l-2)}{(l-1)(l+2)} \quad \text{und} \quad j_0 \in \{h, h+1\} \quad (2.14)$$

für $l = 2h$.

Zunächst diskutieren wir den Fall $l = 2h + 1$, insbesondere $l = 3$. Falls die Aussage (2.11) zutrifft, gibt es Punkte $y_1, y_2 \in S_{j_0}$ mit $|y_1 - y_2| \geq 2 \frac{l-2}{(l-1)(l+1)}$, so daß die Behauptung (2.6) erfüllt ist. Natürlich werden y_1 und y_2 gemäß der

Definition (2.10) von S_{j_0} nur durch U_{j_0} und von keiner anderen Menge aus \mathcal{U} überdeckt. Wegen $j_0 \neq h+1$ und aufgrund von (2.8) liegt schließlich auch eine der Inklusionen (2.7) vor. Alternativ ist im Fall $l = 2h+1$ das Zutreffen von (2.12) zu diskutieren. Dabei gilt offenbar

$$\nu(S_{h+1} \cap [0, 1]) > 2 \frac{l-2}{(l-1)(l+1)} \quad \text{oder} \quad \nu(S_{h+1} \cap [1, 2]) > 2 \frac{l-2}{(l-1)(l+1)} .$$

Demnach finden wir wie bei den Überlegungen für $j_0 \neq h+1$ zwei Punkte $y_1, y_2 \in S_{h+1} \cap [0, 1]$ oder $y_1, y_2 \in S_{h+1} \cap [1, 2]$, die die Eigenschaften (2.6) und (2.7) haben.

Für $l = 2h$ erfolgen die Betrachtungen zu (2.13) und (2.14) analog unter Ausnutzung von (2.9). Damit ist Hilfssatz 2.10 bewiesen. \square

Das folgende Resultat ist eine quantitative Aussage über die lokale Endlichkeit kontrollierbarer Zerlegungen des Würfels $[0, 2]^n$. Es wird ebenfalls zum Nachweis der Optimalität einer Fehlerabschätzung dienen.

Hilfssatz 2.11 *Es seien $\mathcal{Z} = \{Z_1, Z_2, \dots, Z_{h^n}\}$ eine kontrollierbare Zerlegung von $[0, 2]^n$ und $x, y \in [0, 2]^n$ zwei Punkte mit $d_{\max}(x, y) \leq \frac{2}{h}$. Dann gibt es einen Jordanbogen $J \subseteq [0, 2]^n$ von x nach y , der höchstens 2^{n+1} Mengen aus \mathcal{Z} schneidet.*

Beweis: Für $h = 1$ ist die Aussage trivial. Im Fall $h \geq 2$ benutzen wir das Gitter $G_{h^n} \subseteq [0, 2]^n$. Die $(h-1)^n$ Gitterwürfel $g[j_1, j_2, \dots, j_n] + \left[0, \frac{2}{h-1}\right]$, $(j_1, j_2, \dots, j_n) \in \{1, 2, \dots, h-1\}^n$, überdecken offenbar den Würfel $[0, 2]^n$. Es gibt also zwei (nicht notwendig verschiedene) derartige Gitterwürfel W_x und W_y mit $x \in W_x$ und $y \in W_y$. Da der Abstand $d_{\max}(x, y) \leq \frac{2}{h}$ kleiner als die Kantenlänge $\frac{2}{h-1}$ der Gitterwürfel ist, haben W_x und W_y wenigstens einen Eckpunkt $g \in G_{h^n}$ gemeinsam. Wir betrachten den Jordanbogen

$$J = J_x \cup J_y \quad \text{mit} \quad J_x = \overline{xy} \subseteq W_x, \quad J_y = \overline{gy} \subseteq W_y .$$

(Falls J_x und J_y mehr als einen Punkt gemeinsam haben, dann ist die so definierte Menge J kein Jordanbogen von x nach y . In diesem Fall liegen x und y im selben Gitterwürfel. Wir können deshalb $J = J_x = J_y = \overline{xy} \subseteq W_x = W_y$ setzen.)

Wegen der Kontrollierbarkeitseigenschaft ist jede Menge aus \mathcal{Z} in einem achsenparallelen Würfel enthalten, dessen Kantenlänge kleiner als $\frac{2}{h-1}$ ist. Nach Satz 2.6 werden die Gitterwürfel W_x bzw. W_y somit nur von den Zerlegungselementen geschnitten, die einen ihrer 2^n Eckpunkte enthalten. Denn alle anderen Mengen aus \mathcal{Z} enthalten einen Gitterpunkt, der vom betrachteten Gitterwürfel wenigstens den Abstand $\frac{2}{h-1}$ hat. Damit können wir folgendermaßen abschätzen:

$$\begin{aligned} \text{card}(\{Z \in \mathcal{Z} : Z \cap J \neq \emptyset\}) &\leq \\ &\leq \text{card}(\{Z \in \mathcal{Z} : Z \cap J_x \neq \emptyset\}) + \text{card}(\{Z \in \mathcal{Z} : Z \cap J_y \neq \emptyset\}) \\ &\leq \text{card}(\{Z \in \mathcal{Z} : Z \cap W_x \neq \emptyset\}) + \text{card}(\{Z \in \mathcal{Z} : Z \cap W_y \neq \emptyset\}) \\ &= 2^n + 2^n = 2^{n+1} . \end{aligned}$$

Das war zu zeigen. \square

2.1.3 Die Menge $\text{cl}(\Phi_{2^n}([0, 2]^n))$

Da alle nichttrivialen kontrollierbaren Zerlegungen der Einheit auf $[0, 2]^n$ eine Kardinalität l^n mit $l \geq 2$ haben, bestehen die Approximationsklassen $\Phi_m([0, 2]^n)$, $1 \leq m < 2^n$, nur aus den Linearkombinationen der trivialen Zerlegung $\{\mathbf{1}_{[0, 2]^n}\}$ – also nur aus den konstanten Funktionen. In diesem Sinne ist $\Phi_{2^n}([0, 2]^n)$ die erste nichttriviale Klasse approximierender Funktionen. In diesem Abschnitt soll der überraschend große Abschluß $\text{cl}(\Phi_{2^n}([0, 2]^n))$ dieser Menge charakterisiert werden. Er besteht offenbar aus den Funktionen $f \in C([0, 2]^n)$, für die bereits die 2^n -te Approximationszahl $a_{2^n}(f)$ Null ist. Diese Funktionen besitzen folgende geometrische Beschreibung, die für den eindimensionalen Fall $n = 1$ schon in [Ri/Ste] angegeben wurde.

Satz 2.12 *Für jede Funktion $f \in C([0, 2]^n)$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

- (i) $f \in \text{cl}(\Phi_{2^n}([0, 2]^n))$ (also $a_{2^n}(f) = 0$).
- (ii) Für jedes $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ und jede abgeschlossene k -Facette $F^{(k)}$ des Würfels $[0, 2]^n$ nimmt die Einschränkung $f|_{F^{(k)}}$ ihre Extrema in den Ecken von $F^{(k)}$ an:

$$\left\{ \min f(F^{(k)}), \max f(F^{(k)}) \right\} \subseteq f(\text{vert}(F^{(k)})) .$$

Beweis: Zum Nachweis der Implikation (i) \Rightarrow (ii) sei eine beliebige Funktion $f \in \text{cl}(\Phi_{2^n}([0, 2]^n))$ fixiert. Da $\Phi_{2^n}([0, 2]^n)$ nur Linearkombinationen von l^n -elementigen kontrollierbaren Zerlegungen der Einheit mit $l \in \{1, 2\}$ enthält, aber alle Kombinationen der trivialen Zerlegung $\{\mathbf{1}_{[0, 2]^n}\}$ auch mit Hilfe jeder 2^n -elementigen Zerlegung darstellbar sind, ist f ein gleichmäßiger Limes von Linearkombinationen 2^n -elementiger kontrollierbarer Zerlegungen der Einheit auf $[0, 2]^n$. Wir betrachten nun eine Facette $F^{(k)}$. Nach Satz 2.9 ist die Einschränkung $f|_{F^{(k)}}$ ein gleichmäßiger Limes von Linearkombinationen 2^k -elementiger kontrollierbarer Zerlegungen der Einheit auf $F^{(k)}$. Die Facette $F^{(k)}$ ist isometrisch zum Raum $([0, 2]^k, d_{\max})$. Wir identifizieren beide Räume und betrachten somit $f|_{F^{(k)}} \in C([0, 2]^k)$ als gleichmäßigen Limes einer Folge von Linearkombinationen 2^k -elementiger kontrollierbarer Zerlegungen der Einheit Φ_i , $i \geq 1$, auf $[0, 2]^k$. Auf $F^{(k)} = [0, 2]^k$ benutzen wir das k -dimensionale Gitter $G_{2^k} = \text{vert}(F^{(k)})$. Nach Satz 2.6 schreiben wir $\Phi_i = \{\varphi_y^{(i)} : y \in \text{vert}(F^{(k)})\}$ mit

$$y \in \text{supp}(\varphi_y^{(i)}) \setminus \bigcup_{z \in \text{vert}(F^{(k)}) \setminus \{y\}} \text{supp}(\varphi_z^{(i)}) . \quad (2.15)$$

Die Funktion $f|_{F^{(k)}}$ besitzt somit eine Darstellung

$$f|_{F^{(k)}} = \lim_{i \rightarrow \infty} \varphi^{(i)} \quad \text{mit} \quad \varphi^{(i)} = \sum_{y \in \text{vert}(F^{(k)})} \lambda_y^{(i)} \varphi_y^{(i)} .$$

Die Werte jeder Funktion $\varphi^{(i)}$ sind Konvexkombinationen der Koeffizienten $\lambda_y^{(i)}$, $y \in \text{vert}(F^{(k)})$, wobei aufgrund von (2.15) alle Koeffizienten $\lambda_y^{(i)} = \varphi^{(i)}(y)$ auch als

Funktionswerte angenommen werden. Somit gilt

$$\min \varphi^{(i)} \left(F^{(k)} \right) = \min_{y \in \text{vert}(F^{(k)})} \lambda_y^{(i)} = \min_{y \in \text{vert}(F^{(k)})} \varphi^{(i)}(y) .$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \min f \left(F^{(k)} \right) &= \min \left(f|_{F^{(k)}} \left(F^{(k)} \right) \right) = \lim_{i \rightarrow \infty} \min \varphi^{(i)} \left(F^{(k)} \right) \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \min_{y \in \text{vert}(F^{(k)})} \varphi^{(i)}(y) = \min_{y \in \text{vert}(F^{(k)})} f|_{F^{(k)}}(y) \in f \left(\text{vert} \left(F^{(k)} \right) \right) . \end{aligned}$$

Die Argumentation für $\max f \left(F^{(k)} \right)$ erfolgt analog. Damit ist die Implikation (i) \Rightarrow (ii) bewiesen.

Es sei nun eine Funktion $f \in C([0, 2]^n)$ gegeben, die die Eigenschaft (ii) hat. Zum Nachweis von (i) werden wir zeigen, daß zu jedem vorgegebenen $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$ eine kontrollierbare Zerlegung der Einheit $\{\varphi_y : y \in \text{vert}([0, 2]^n)\}$ existiert, so daß

$$\left\| f - \sum_{y \in \text{vert}([0, 2]^n)} f(y) \varphi_y \right\| \leq n \cdot \omega(f, 2\varepsilon) . \quad (2.16)$$

Da die rechte Seite der Abschätzung im Limes $\varepsilon \rightarrow +0$ gegen Null strebt, gilt offenbar $f \in \text{cl}(\Phi_{2^n}([0, 2]^n))$.

Die Zerlegung der Einheit $\{\varphi_y : y \in \text{vert}([0, 2]^n)\}$ soll schrittweise auf den sogenannten k -Gerüsten $G^{(k)}$, $0 \leq k \leq n$, von $[0, 2]^n$ eingeführt werden. Dies sind die Vereinigungen $G^{(k)} = \bigcup_{i=1}^{j_k} F_i^{(k)}$ aller k -Facetten $F_i^{(k)}$, $1 \leq i \leq j_k$, des Würfels $[0, 2]^n$. Offenbar gilt

$$\text{vert}([0, 2]^n) = G^{(0)} \subset G^{(1)} \subset G^{(2)} \subset \dots \subset G^{(n)} = [0, 2]^n .$$

Wir definieren sukzessive Mengen $\{\varphi_y^{(k)} : y \in \text{vert}([0, 2]^n)\}$ stetiger Funktionen auf $G^{(k)}$, $0 \leq k \leq n$, mit folgenden Eigenschaften:

[k.1] $\{\varphi_y^{(k)} : y \in \text{vert}([0, 2]^n)\}$ ist eine Zerlegung der Einheit auf $G^{(k)}$.

[k.2] $\text{supp}(\varphi_y^{(k)}) \subseteq B(y, 2 - \varepsilon) \cap G^{(k)}$ für alle $y \in \text{vert}([0, 2]^n)$.

[k.3] $\left\| f|_{G^{(k)}} - \sum_{y \in \text{vert}([0, 2]^n)} f(y) \varphi_y^{(k)} \right\|_{G^{(k)}} \leq k \cdot \omega(f, 2\varepsilon) .$

(Dabei ist $B(y, 2 - \varepsilon)$ die abgeschlossene Kugel im Raum $[0, 2]^n$ mit Mittelpunkt y und Radius $2 - \varepsilon$.) Im Fall $k = 0$ setzen wir $\varphi_y^{(0)}(x) = \delta_{x,y}$ für $x \in G^{(0)}$. Die Aussagen [0.1], [0.2] und [0.3] sind offensichtlich erfüllt.

Zur Definition der Funktionen auf $G^{(k)}$, $k > 0$, können wir nun im Sinne einer Induktion von einer gegebenen Zerlegung der Einheit $\{\varphi_y^{(k-1)} : y \in \text{vert}([0, 2]^n)\}$ auf $G^{(k-1)}$ mit den Eigenschaften [k-1.1], [k-1.2] und [k-1.3] ausgehen. Zunächst betrachten wir eine fixierte k -Facette $F_i^{(k)}$. Mit $\partial F_i^{(k)} = F_i^{(k)} \cap G^{(k-1)}$ bezeichnen wir den *relativen Rand* von $F_i^{(k)}$. Wir definieren eine stetige Funktion $\psi : F_i^{(k)} \rightarrow [0, 1]$

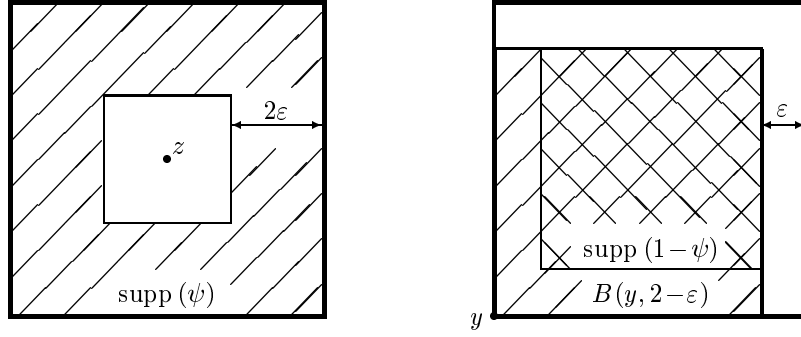


Abbildung 2.1: Mittelpunkt z und Träger von ψ (links) bzw. Kugel $B(y, 2 - \varepsilon)$ und Träger von $1 - \psi$ (rechts) auf der Facette $F_i^{(k)}$

vermöge

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } d_{\max}(x, \partial F_i^{(k)}) \leq \varepsilon, \\ 2 - \frac{1}{\varepsilon} d_{\max}(x, \partial F_i^{(k)}) & \text{für } \varepsilon \leq d_{\max}(x, \partial F_i^{(k)}) \leq 2\varepsilon, \\ 0 & \text{für } 2\varepsilon \leq d_{\max}(x, \partial F_i^{(k)}) . \end{cases}$$

Dabei sei $d_{\max}(x, \partial F_i^{(k)}) = \inf \{d_{\max}(x, x') : x' \in \partial F_i^{(k)}\}$. Mit $\{\psi, 1 - \psi\}$ ist somit eine Zerlegung der Einheit auf $F_i^{(k)}$ gegeben, wobei

$$\text{supp}(\psi) = \{x \in F_i^{(k)} : d_{\max}(x, \partial F_i^{(k)}) < 2\varepsilon\} \quad \text{und} \quad (2.17)$$

$$\text{supp}(1 - \psi) = \{x \in F_i^{(k)} : \varepsilon < d_{\max}(x, \partial F_i^{(k)})\} \quad (2.18)$$

(vgl. Abbildung 2.1). Weiterhin bezeichne $\pi : F_i^{(k)} \setminus \{z\} \rightarrow \partial F_i^{(k)}$ die Zentralprojektion vom Mittelpunkt $z \in F_i^{(k)}$ auf den Rand $\partial F_i^{(k)} = F_i^{(k)} \cap G^{(k-1)}$, also

$$\pi(x) = z + \frac{x - z}{d_{\max}(x, z)} . \quad (2.19)$$

Für $y \in \text{vert}([0, 2]^n)$ und $x \in F_i^{(k)}$ definieren wir

$$\chi_y(x) = \begin{cases} \psi(x) \cdot \varphi_y^{(k-1)}(\pi(x)) & \text{für } x \neq z, \\ 0 & \text{für } x = z. \end{cases} \quad (2.20)$$

Wegen (2.17) und $\varepsilon < \frac{1}{2}$ ist $\psi(x) = 0$ für alle Punkte x einer Umgebung von z (vgl. Abbildung 2.1). Die Funktion χ_y ist deshalb stetig auf $F_i^{(k)}$. Da die Funktionen $\varphi_y^{(k-1)}$, $y \in \text{vert}([0, 2]^n)$, gemäß $[k - 1, 1]$ eine Zerlegung der Einheit auf $G^{(k-1)}$ bilden, gilt

$$\chi_y \geq 0 \quad \text{für } y \in \text{vert}([0, 2]^n) \quad \text{und} \quad \sum_{y \in \text{vert}([0, 2]^n)} \chi_y = \psi . \quad (2.21)$$

Für alle Punkte $x \in \partial F_i^{(k)}$ gilt $\psi(x) = 1$ und $\pi(x) = x$. Damit erhalten wir

$$\chi_y|_{\partial F_i^{(k)}} = \varphi_y^{(k-1)}|_{\partial F_i^{(k)}} . \quad (2.22)$$

Weiterhin gilt für die Träger der Funktionen χ_y , $y \in \text{vert}([0, 2]^n)$, die Inklusion

$$\text{supp}(\chi_y) \subseteq B(y, 2 - \varepsilon) \cap F_i^{(k)} . \quad (2.23)$$

Zum Nachweis dieser Eigenschaft stellen wir zunächst fest, daß für alle Punkte $x \in \text{supp}(\chi_y)$ sowohl $x \neq z$ als auch $\pi(x) \in F_i^{(k)} \cap \text{supp}(\varphi_y^{(k-1)})$ gelten muß. Nach $[k - 1, 2]$ folgt daraus

$$\text{supp}(\chi_y) \subseteq \left\{ x \in F_i^{(k)} : x \neq z, \pi(x) \in F_i^{(k)} \cap B(y, 2 - \varepsilon) \right\} . \quad (2.24)$$

Im Fall $y \notin \text{vert}(F_i^{(k)})$ gilt $d_{\max}(y, F_i^{(k)}) = 2$, also $F_i^{(k)} \cap B(y, 2 - \varepsilon) = \emptyset$ und deshalb $\text{supp}(\chi_y) = \emptyset$. Die geforderte Inklusion (2.23) ist damit trivial. Es sei nun $y \in \text{vert}(F_i^{(k)})$. Offenbar gilt $z \in B(y, 2 - \varepsilon)$. Für jeden Punkt $x \in \text{supp}(\chi_y)$ folgt nach (2.24) auch $\pi(x) \in B(y, 2 - \varepsilon)$. Unter Ausnutzung von (2.19) überprüft man leicht die Darstellung

$$x = d_{\max}(x, z) \pi(x) + (1 - d_{\max}(x, z)) z .$$

Somit ist jeder Punkt $x \in \text{supp}(\chi_y)$ als Konvexkombination zweier Punkte z und $\pi(x)$ aus $B(y, 2 - \varepsilon)$ selbst ein Element von $B(y, 2 - \varepsilon)$. Damit ist (2.23) auch für $y \in \text{vert}(F_i^{(k)})$ verifiziert.

Wir nutzen nun die Eigenschaft (ii) von f aus. Danach existieren zwei Eckpunkte $y_1, y_2 \in \text{vert}(F_i^{(k)})$, $y_1 \neq y_2$, so daß

$$f(y_1) = \min f(F_i^{(k)}) \quad \text{und} \quad f(y_2) = \max f(F_i^{(k)}) . \quad (2.25)$$

Für $x \in F_i^{(k)}$ definieren wir nichtnegative Funktionen

$$\eta_1(x) = \begin{cases} \frac{f(y_2) - f(x)}{f(y_2) - f(y_1)} (1 - \psi(x)) , & \text{falls } f(y_1) \neq f(y_2) , \\ \frac{1}{2} (1 - \psi(x)) , & \text{falls } f(y_1) = f(y_2) \left(= f(x) \right) , \end{cases} \quad (2.26)$$

und

$$\eta_2(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - f(y_1)}{f(y_2) - f(y_1)} (1 - \psi(x)) , & \text{falls } f(y_1) \neq f(y_2) , \\ \frac{1}{2} (1 - \psi(x)) , & \text{falls } f(y_1) = f(y_2) \left(= f(x) \right) . \end{cases} \quad (2.27)$$

Beide Funktionen sind offenbar stetig auf $F_i^{(k)}$, und es gilt

$$\eta_j \geq 0 \quad \text{für } j \in \{1, 2\} \quad \text{und} \quad \eta_1 + \eta_2 = 1 - \psi . \quad (2.28)$$

Wegen $\text{supp}(\eta_j) \subseteq \text{supp}(1 - \psi)$ folgt aus (2.18) sowohl

$$\eta_j|_{\partial F_i^{(k)}} \equiv 0 \quad (2.29)$$

als auch

$$\text{supp}(\eta_j) \subseteq B(y_j, 2 - \varepsilon) \cap F_i^{(k)} \quad (2.30)$$

für $j \in \{1, 2\}$ (vgl. Abbildung 2.1).

Für $y \in \text{vert}([0, 2]^n)$ setzen wir nun

$$\varphi_{y,i}^{(k)} = \begin{cases} \chi_{y_1} + \eta_1, & \text{falls } y = y_1, \\ \chi_{y_2} + \eta_2, & \text{falls } y = y_2, \\ \chi_y & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Funktionen $\varphi_{y,i}^{(k)}$, $y \in \text{vert}([0, 2]^n)$, sind offensichtlich stetig auf $F_i^{(k)}$. Aufgrund von (2.21) und (2.28) gilt

$$\varphi_{y,i}^{(k)} \geq 0 \quad \text{für } y \in \text{vert}([0, 2]^n) \quad \text{und} \quad \sum_{y \in \text{vert}([0, 2]^n)} \varphi_{y,i}^{(k)} \equiv 1. \quad (2.31)$$

Die Träger erfüllen wegen (2.23) und (2.30) die Inklusion

$$\text{supp}(\varphi_{y,i}^{(k)}) \subseteq B(y, 2 - \varepsilon) \cap F_i^{(k)}, \quad (2.32)$$

und die Gleichungen (2.22) und (2.29) implizieren

$$\varphi_{y,i}^{(k)}|_{\partial F_i^{(k)}} = \varphi_y^{(k-1)}|_{\partial F_i^{(k)}}. \quad (2.33)$$

Weiterhin gilt auf $F_i^{(k)}$ die Abschätzung

$$\left\| f|_{F_i^{(k)}} - \sum_{y \in \text{vert}([0, 2]^n)} f(y) \varphi_{y,i}^{(k)} \right\|_{F_i^{(k)}} \leq k \cdot \omega(f, 2\varepsilon). \quad (2.34)$$

Zum Nachweis dieser Ungleichung fixieren wir einen Punkt $x \in F_i^{(k)}$. Für die folgende Rechnung benutzen wir die Formeln (2.20), (2.26), (2.27) und $[k - 1.3]$:

$$\begin{aligned} & \left| f|_{F_i^{(k)}}(x) - \sum_{y \in \text{vert}([0, 2]^n)} f(y) \varphi_{y,i}^{(k)}(x) \right| = \\ &= \left| \left(\psi(x) f(x) - \sum_{y \in \text{vert}([0, 2]^n)} f(y) \chi_y(x) \right) + \right. \\ & \quad \left. + \left((1 - \psi(x)) f(x) - (f(y_1) \eta_1(x) + f(y_2) \eta_2(x)) \right) \right| \\ &= \left| \psi(x) \left(f(x) - \sum_{y \in \text{vert}([0, 2]^n)} f(y) \varphi_y^{(k-1)}(\pi(x)) \right) + \right. \\ & \quad \left. + \left((1 - \psi(x)) f(x) - (1 - \psi(x)) f(x) \right) \right| \\ &= \psi(x) \left| f(x) - \sum_{y \in \text{vert}([0, 2]^n)} f(y) \varphi_y^{(k-1)}(\pi(x)) \right| \\ &\leq \psi(x) \left(|f(x) - f(\pi(x))| + \left| f(\pi(x)) - \sum_{y \in \text{vert}([0, 2]^n)} f(y) \varphi_y^{(k-1)}(\pi(x)) \right| \right) \\ &\leq \psi(x) \left(\omega(f, d_{\max}(x, \pi(x))) + (k - 1) \omega(f, 2\varepsilon) \right). \quad (2.35) \end{aligned}$$

Wir nehmen nun zunächst $x \in \text{supp}(\psi)$ an. Wegen (2.17) folgt in diesem Fall $d_{\max}(x, z) = \|x - z\|_{\max} \in (1 - 2\varepsilon, 1]$, wobei wir die Metrik $d_{\max}(\cdot, \cdot)$ mit Hilfe der zugehörigen Maximumnorm $\|\cdot - \cdot\|_{\max}$ ausdrücken. Unter Ausnutzung von (2.19) erhalten wir die Abschätzung

$$d_{\max}(x, \pi(x)) = \left\| x - \left(z + \frac{x - z}{\|x - z\|_{\max}} \right) \right\|_{\max} = \left| \|x - z\|_{\max} - 1 \right| \leq 2\varepsilon ,$$

so daß wir wegen $\omega(f, d_{\max}(x, \pi(x))) \leq \omega(f, 2\varepsilon)$ und $\psi(x) \leq 1$ die Ungleichung (2.35) zu

$$\left| f|_{F_i^{(k)}}(x) - \sum_{y \in \text{vert}([0, 2]^n)} f(y) \varphi_{y,i}^{(k)}(x) \right| \leq k \cdot \omega(f, 2\varepsilon) \quad (2.36)$$

fortsetzen können. Für $x \notin \text{supp}(\psi)$, also $\psi(x) = 0$, folgt (2.36) trivial aus (2.35). Somit gilt Formel (2.36) für alle $x \in F_i^{(k)}$, und die Abschätzung (2.34) ist bewiesen.

Die gesuchten stetigen Funktionen $\varphi_y^{(k)}$, $y \in \text{vert}([0, 2]^n)$, auf dem k -Gerüst $G^{(k)} = \bigcup_{i=1}^{j_k} F_i^{(k)}$ können wir nun aus den auf den einzelnen k -Facetten definierten Funktionen $\varphi_{y,i}^{(k)}$ gemäß

$$\varphi_y^{(k)}(x) = \varphi_{y,i}^{(k)}(x) \quad \text{für} \quad x \in F_i^{(k)}$$

zusammensetzen. Da sich verschiedene k -Facetten $F_i^{(k)}$ nur in Punkten ihrer relativen Ränder $\partial F_i^{(k)}$ schneiden, ist $\varphi_y^{(k)}$ aufgrund von (2.33) wohldefiniert. Wegen (2.31) ist $\{\varphi_y^{(k)} : y \in \text{vert}([0, 2]^n)\}$ eine Zerlegung der Einheit; es gilt also [k.1]. Die Eigenschaften [k.2] und [k.3] ergeben sich schließlich direkt aus (2.32) bzw. (2.34). Damit ist die Existenz von Funktionensystemen $\{\varphi_y^{(k)} : y \in \text{vert}([0, 2]^n)\}$, $0 \leq k \leq n$, mit den Eigenschaften [k.1], [k.2] und [k.3] gezeigt.

Für $k = n$ haben wir eine Zerlegung der Einheit $\{\varphi_y^{(n)} : y \in \text{vert}([0, 2]^n)\}$ auf $G^{(n)} = [0, 2]^n$ erhalten. Nach [n.2] sind die Träger der 2^n Funktionen jeweils in einem achsenparallelen Würfel der Kantenlänge $2 - \varepsilon$ – also einer Kugel vom Radius $1 - \frac{\varepsilon}{2}$ – enthalten. Deshalb gilt

$$\varepsilon_1 \left(\text{supp} \left(\varphi_y^{(n)} \right) \right) < 1 = \varepsilon_{2^n-1}([0, 2]^n) \quad \text{für} \quad y \in \text{vert}([0, 2]^n) .$$

Es liegt somit eine kontrollierbare Zerlegung der Einheit vor. Wegen [n.3] ist für $\{\varphi_y^{(n)} : y \in \text{vert}([0, 2]^n)\}$ auch die Ungleichung (2.16) erfüllt. Die Existenz einer derartigen kontrollierbaren Zerlegung der Einheit war zum Beweis der Implikation (ii) \Rightarrow (i) zu zeigen. Damit ist Satz 2.12 vollständig bewiesen. \square

Wir wollen hier anmerken, daß man Satz 2.12, der eigentlich approximations-theoretisch motiviert ist, umgekehrt auch als Charakterisierung einer Funktionenklasse verstehen kann, die vermöge der Eigenschaft (ii) eng mit der polyedrischen Struktur des Würfels $[0, 2]^n$ verbunden ist. Dem geometrisch interessierten Leser wird diese Interpretation näherliegen.

Für die eingangs vorgestellte Approximationstheorie ist Satz 2.12 von eher negativer Bedeutung. Tatsächlich wird dadurch die Fehlerabschätzung aus Satz 2.5

stark relativiert. So ist beispielsweise im eindimensionalen Fall die zweite Approximationszahl $a_2(f)$ einer Funktion $f \in C[0, 2]$ schon dann Null, wenn diese ihre Extrema in den Endpunkten 0 und 2 des Intervalls $[0, 2]$ annimmt. Diese Eigenschaft wird insbesondere von allen monotonen Funktionen erfüllt. Andererseits kann der Stetigkeitsmodul solcher Funktionen beliebig „schlecht“ sein, so daß Satz 2.5 nur sehr große obere Schranken sowohl für $a_2(f)$ als auch für die folgenden Approximationszahlen $a_m(f)$, $m \geq 3$, von f liefert.

Ein analoges Phänomen tritt jedoch auch bei der klassischen Polynomapproximation von stetigen Funktionen auf einem kompakten Intervall auf. Auch dort gibt es Funktionen – nämlich die Polynome – für die die Folge der Approximationsgrößen ab einer gewissen Stelle nur noch Nullen enthält, obwohl ihr Stetigkeitsmodul sehr groß sein kann. Die Optimalitätsaussage des nächsten Abschnittes wird belegen, daß Satz 2.5 durchaus mit der entsprechenden klassischen *Jackson*-Abschätzung für die Polynomapproximation vergleichbar ist.

Es sei weiterhin angemerkt, daß die Klasse $\text{cl}(\Phi_{2^n}([0, 2]^n))$ hinsichtlich ihrer Struktur eine Ausnahmestelle spielt. Wir verdeutlichen uns dies für den eindimensionalen Fall $n = 1$: Die Klasse $\Phi_2([0, 2])$ besteht offenbar aus allen Linearkombinationen zweielementiger kontrollierbarer Zerlegungen der Einheit $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ von $[0, 2]$. Die Kontrollierbarkeitsbedingung $\varepsilon_1(\text{supp}(\varphi_i)) < 1$, $i \in \{1, 2\}$, besagt hier lediglich, daß die beiden Träger jeweils in einem Intervall enthalten sind, dessen Länge kleiner als 2 ist. Damit können sich die beiden Träger fast vollständig überlappen, und der von den Trägern einfach überdeckte Teil $S(\{\text{supp}(\varphi_1), \text{supp}(\varphi_2)\})$ (vgl. Satz 2.8) kann beliebig klein werden. Dagegen liefert Satz 2.8 für jede kontrollierbare Zerlegung der Einheit $\{\varphi_i : 1 \leq i \leq l\}$ einer Kardinalität $l > 2$ eine echt positive untere Schranke für $\nu(S(\{\text{supp}(\varphi_i) : 1 \leq i \leq l\}))$. Weil sich die Menge $S(\{\text{supp}(\varphi_i) : 1 \leq i \leq l\})$ aber aus den Teilen von $[0, 2]$ zusammensetzt, in denen jeweils eine der Funktionen φ_i den Wert Eins annimmt, während die anderen verschwinden, besitzt jede Linearkombination $\sum_{i=1}^l \lambda_i \varphi_i$ auf dieser Menge nur die Werte λ_i , $1 \leq i \leq l$. Da das Maß der Mengen $S(\{\text{supp}(\varphi_i) : 1 \leq i \leq l\})$ für wachsendes l gegen das Maß $\nu([0, 2]) = 2$ strebt, bekommen die zugehörigen Linearkombinationen sogar mehr und mehr den Charakter von Treppenfunktionen. Für höhere Dimensionen n erhalten wir unter Ausnutzung von Satz 2.9 ähnliche Aussagen über die Ausnahmestellung von $\text{cl}(\Phi_{2^n}([0, 2]^n))$.

2.1.4 Optimalität der *Jackson*-Abschätzung

Obwohl die Menge der Funktionen $f \in C([0, 2]^n)$ mit $a_{2^n}(f) = 0$ nach den obigen Überlegungen sehr groß und die Abschätzung aus Satz 2.5 für diese Funktionen praktisch irrelevant ist, werden wir nun zeigen, daß Satz 2.5 dennoch seine Berechtigung hat. Dazu soll für eine Beispielfunktion $f_1 \in C([0, 2]^n)$ die Beziehung

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a_m(f_1)}{\omega(f_1, \varepsilon_m([0, 2]^n))} = 1$$

bewiesen werden. Diese Aussage zeigt sogar die *Optimalität von Satz 2.5* in folgendem Sinne: Die Konstante $c = 1$ in der zur Diskussion stehenden *Jackson-Abschätzung* $a_m(f) \leq c \cdot \omega(f, \varepsilon_m([0, 2]^n))$ kann durch keine Konstante $c' < 1$ ersetzt werden, wenn die Fehlerabschätzung universell für alle $f \in C([0, 2]^n)$ und für alle – oder auch nur für unendlich viele – natürliche Zahlen m gültig bleiben soll. Zur Vorbereitung wollen wir zunächst eine Hilfsaussage für den eindimensionalen Fall verifizieren.

Hilfssatz 2.13 *Es sei $\varphi = \sum_{i=1}^l \lambda_i \varphi_i$ eine Linearkombination einer kontrollierbaren Zerlegung der Einheit $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_l\}$ auf dem Intervall $[0, 2]$. Dann gilt für die Funktion $f_0(x) = |1 - x|$ auf $[0, 2]$:*

$$\|f_0 - \varphi\| \geq \frac{1}{2} \quad \text{für} \quad l \in \{1, 2\}, \quad (2.37)$$

$$\|f_0 - \varphi\| \geq \frac{1}{8} \quad \text{für} \quad l = 3, \quad (2.38)$$

$$\|f_0 - \varphi\| \geq \frac{l-2}{(l-1)(l+2)} \quad \text{für} \quad l = 4, 5, 6, \dots \quad (2.39)$$

Beweis: Für $l = 1$ gilt $\varphi \equiv \lambda_1$, und die Aussage ist trivial.

Im Fall $l = 2$ wenden wir auf die Überdeckung $\{\text{supp}(\varphi_1), \text{supp}(\varphi_2)\}$ Satz 2.6 an und erhalten o.B.d.A.

$$0 \in \text{supp}(\varphi_1) \setminus \text{supp}(\varphi_2) \quad \text{und} \quad 2 \in \text{supp}(\varphi_2) \setminus \text{supp}(\varphi_1).$$

Wegen $\varphi_1 + \varphi_2 \equiv 1$ folgt $\varphi_1(0) = \varphi_2(2) = 1$ sowie $\varphi_1(2) = \varphi_2(0) = 0$ und somit

$$\varphi(0) = \lambda_1 \quad \text{und} \quad \varphi(2) = \lambda_2.$$

Zum indirekten Nachweis von (2.37) gehen wir von der Annahme $\|f_0 - \varphi\| < \frac{1}{2}$ aus. Dementsprechend gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} > |f_0(0) - \varphi(0)| &= |1 - \lambda_1|, & \text{also} \quad \lambda_1 &\in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right), & \text{und} \\ \frac{1}{2} > |f_0(2) - \varphi(2)| &= |1 - \lambda_2|, & \text{also} \quad \lambda_2 &\in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right). \end{aligned}$$

Da $\lambda_1 \varphi_1(1) + \lambda_2 \varphi_2(1)$ eine Konvexkombination der Koeffizienten λ_1 und λ_2 ist, erhalten wir

$$\frac{1}{2} > |f_0(1) - \varphi(1)| = |\lambda_1 \varphi_1(1) + \lambda_2 \varphi_2(1)| \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

Dieser Widerspruch belegt die Gültigkeit von (2.37).

Nach der Diskussion der Sonderfälle $l = 1$ und $l = 2$ können wir nun für $l \geq 3$ den Hilfssatz 2.10 auf die kontrollierbare Überdeckung $\{\text{supp}(\varphi_i) : 1 \leq i \leq l\}$ anwenden. Danach existieren ein Index i_0 und Punkte y_1, y_2 , die die Bedingungen (2.6) und (2.7) erfüllen, wobei

$$y_1, y_2 \in \text{supp}(\varphi_{i_0}) \quad \text{und} \quad y_1, y_2 \notin \text{supp}(\varphi_i) \quad \text{für} \quad i \neq i_0.$$

Somit gilt $\varphi_i(y_1) = \varphi_i(y_2) = \delta_{i,i_0}$ für $1 \leq i \leq l$. Damit erhalten wir

$$\varphi(y_1) = \varphi(y_2) = \lambda_{i_0}.$$

Andererseits gilt aufgrund von Aussage (2.7), daß

$$|f_0(y_1) - f_0(y_2)| = |y_1 - y_2|.$$

Folglich können wir abschätzen

$$\begin{aligned} \|f_0 - \varphi\| &\geq \max\{|f_0(y_1) - \varphi(y_1)|, |f_0(y_2) - \varphi(y_2)|\} \\ &= \max\{|f_0(y_1) - \lambda_{i_0}|, |f_0(y_2) - \lambda_{i_0}|\} \\ &\geq \frac{1}{2} |f_0(y_1) - f_0(y_2)| = \frac{1}{2} |y_1 - y_2|. \end{aligned}$$

Die Behauptungen (2.38) und (2.39) ergeben sich nun als einfache Folgerungen aus (2.6). \square

Nun kommen wir zur angekündigten Aussage über die Optimalität der *Jackson*-Abschätzung aus Satz 2.5.

Satz 2.14 *Es sei $f_1 \in C([0, 2]^n)$ die Funktion $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = |1 - x_1|$. Dann gilt*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a_m(f_1)}{\omega(f_1, \varepsilon_m([0, 2]^n))} = 1.$$

Genauer ist für $m \in \{1, 2, 3, \dots\}$ die Abschätzung

$$a_m(f_1) \geq c(m) \cdot \omega(f_1, \varepsilon_m([0, 2]^n))$$

mit

$$c(m) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } m \in \{1, 2, \dots, 2^n - 1\}, \\ 1 & \text{für } m \in \{2^n, 2^n + 1, \dots, 3^n - 1\}, \\ \frac{3}{8} & \text{für } m \in \{3^n, 3^n + 1, \dots, 4^n - 1\}, \\ \frac{(l-2)l}{(l-1)(l+2)} & \text{für } m \in \{l^n, l^n + 1, \dots, (l+1)^n - 1\}, l \geq 4, \end{cases}$$

erfüllt.

Beweis: Wir können uns auf den Nachweis der angegebenen unteren Abschätzungen beschränken, da daraus mit Hilfe von Satz 2.5 die obige Limesbeziehung folgt.

Offensichtlich gilt $\omega(f_1, \delta) = \delta$ für $0 \leq \delta \leq 1$. Wir fixieren eine natürliche Zahl $m \in \{1, 2, 3, \dots\}$. Gemäß (2.1) erhalten wir

$$\varepsilon_m([0, 2]^n) = \frac{1}{l} \quad \text{für } m \in \{l^n, l^n + 1, \dots, (l+1)^n - 1\}$$

und somit

$$\omega(f_1, \varepsilon_m([0, 2]^n)) = \frac{1}{l}.$$

Zum Beweis von Satz 2.14 genügt also der Nachweis von

$$a_m(f_1) \geq \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } l = 1, \\ \frac{1}{2} & \text{für } l = 2, \\ \frac{1}{8} & \text{für } l = 3, \\ \frac{l-2}{(l-1)(l+2)} & \text{für } l \geq 4. \end{cases} \quad (2.40)$$

Wir betrachten eine beliebige Funktion $\varphi \in \Phi_m([0, 2]^n)$, die zur Bestimmung des Infimums $a_m(f_1)$ zugelassen ist. φ ist also eine Linearkombination einer kontrollierbaren Zerlegung der Einheit $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k\}$ von $[0, 2]^n$ mit einer Kardinalität $k \leq m$. Da solche Zerlegungen der Einheit nur für Kardinalitäten h^n existieren, gilt

$$k = h^n \quad \text{mit} \quad 1 \leq h \leq l. \quad (2.41)$$

Auf die Zerlegung der Einheit $\{\varphi_i : 1 \leq i \leq h^n\}$ wenden wir Satz 2.9 bezüglich der Facette $F = [0, 2] \times \{0\}^{n-1}$ sinngemäß an. Danach gibt es genau h Zerlegungsfunktionen $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_h$, deren Träger einen nichtleeren Schnitt mit F haben. Die Einschränkungen dieser Funktionen auf F bilden eine h -elementige kontrollierbare Zerlegung der Einheit $\{\varphi_i|_F : 1 \leq i \leq h\}$ auf F . Offenbar ist $\varphi|_F$ eine Linearkombination dieser Zerlegung.

Die Kante F ist isometrisch zum Intervall $[0, 2]$, so daß Hilfssatz 2.13 auf $\varphi|_F$ und die Funktion $f_1|_F \in C(F)$ mit $f_1|_F(x, 0, 0, \dots, 0) = |1 - x|$ angewandt werden kann. Demnach gilt auf F die Normabschätzung

$$\|f_1|_F - \varphi|_F\|_F \geq \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } h \in \{1, 2\}, \\ \frac{1}{8} & \text{für } h = 3, \\ \frac{h-2}{(h-1)(h+2)} & \text{für } h = 4, 5, 6, \dots \end{cases}$$

Unter Berücksichtigung der Einschränkung (2.41) für h und unter Ausnutzung der Ungleichung $\|f_1 - \varphi\| \geq \|f_1|_F - \varphi|_F\|_F$ erhalten wir

$$\|f_1 - \varphi\| \geq \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } l \in \{1, 2\}, \\ \frac{1}{8} & \text{für } l = 3, \\ \frac{l-2}{(l-1)(l+2)} & \text{für } l = 4, 5, 6, \dots \end{cases}$$

für alle Funktionen $\varphi \in \Phi_m([0, 2]^n)$. Durch Infimumsbildung gelangen wir schließlich zur gesuchten Abschätzung (2.40). \square

Satz 2.14 verschärft eine Aussage aus [Ri/Ste]. Dort wurde für den eindimensionalen Fall $n = 1$ die inverse Abschätzung

$$a_m(f_1) \geq \frac{1}{4} \omega(f_1, \varepsilon_m([0, 2]))$$

bewiesen.

Unsere Überlegungen werten die *Jackson*-Abschätzung des Satzes 2.5 und damit die eingangs eingeführte Approximationstheorie auf. Die Optimalität im Sinne von

Satz 2.14 wurde jedoch nur für die spezielle Funktion f_1 nachgewiesen. Im folgenden Abschnitt wollen wir eine modifizierte Approximationstheorie vorstellen, die einerseits eine Fehlerabschätzung wie in Satz 2.5, aber andererseits auch eine für *alle* stetigen Funktionen universelle inverse Ungleichung liefert.

2.2 Approximation durch kontrollierbare Treppenfunktionen

2.2.1 Einführung

Wir betrachten zunächst wieder einen allgemeinen kompakten metrischen Raum (X, d) . Im Gegensatz zur Approximation mittels kontrollierbarer Zerlegungen der Einheit, bei der stetige Funktionen $f \in C(X)$ durch stetige Funktionen aus den Klassen $\Phi_m(X)$ angenähert werden, stellen wir nun eine in [Ri/Ste] eingeführte Theorie vor, die sich im Banachraum $M(X)$ aller beschränkten reellen Funktionen auf X abspielt. Der Raum $M(X)$ ist mit der Norm $\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$ versehen, so daß $C(X)$ einen abgeschlossenen Teilraum bildet.

Zur Approximation von Funktionen $f \in M(X)$, insbesondere auch stetiger Funktionen $f \in C(X)$, benutzen wir sogenannte *kontrollierbare Treppenfunktionen* auf X . Dies sind Linearkombinationen

$$\hat{\varphi} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{1}_{Z_i}$$

von Indikatorfunktionen von *kontrollierbaren Zerlegungen* $\{Z_1, Z_2, \dots, Z_k\}$ des Raumes X . Ähnlich wie bisher, wo die Träger der Funktionen aus kontrollierbaren Zerlegungen der Einheit die Uniformitätsbedingung gemäß Definition 2.1 erfüllen mußten, fordern wir nun die entsprechende Eigenschaft von den „Treppenstufen“ Z_i , $1 \leq i \leq k$.

Wir definieren folgende Funktionenklassen $\hat{\Phi}_m(X)$:

$$\hat{\Phi}_m(X) = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{1}_{Z_i} : \lambda_i \in \mathbb{R}, \{Z_1, Z_2, \dots, Z_k\} \text{ ist eine kontrollierbare Zerlegung von } X \text{ mit } k \leq m \right\}.$$

Das so erhaltene Schema $\hat{\Phi}_1(X) \subseteq \hat{\Phi}_2(X) \subseteq \hat{\Phi}_3(X) \subseteq \dots \subseteq M(X)$ führt in naheliegender Weise zu den *Approximationszahlen*

$$\hat{a}_m(f) = \inf \left\{ \|f - \hat{\varphi}\| : \hat{\varphi} \in \hat{\Phi}_m(X) \right\}$$

für alle Funktionen $f \in M(X)$. In Analogie zu Satz 2.5 erhalten wir eine quantitative Fehlerabschätzung vom *Jacksonschen* Typ mit Hilfe des Stetigkeitsmoduls.

Satz 2.15 *Ist (X, d) ein kompakter metrischer Raum, so gilt für alle Funktionen $f \in M(X)$ und alle natürlichen Zahlen $m \geq 1$ die Abschätzung*

$$\hat{\alpha}_m(f) \leq \omega(f, \varepsilon_m(X)) .$$

Beweis: Da die Folge der Entropiezahlen von X monoton fällt, gibt es eine eindeutig bestimmte natürliche Zahl $k \in \{1, 2, \dots, m\}$, so daß

$$\varepsilon_k(X) = \varepsilon_m(X)$$

und

$$k = 1 \quad \text{oder} \quad \varepsilon_k(X) < \varepsilon_{k-1}(X) .$$

Der kompakte Raum X besitzt eine Überdeckung $\{B(x_i, \varepsilon_k(X)) : 1 \leq i \leq k\}$ aus k abgeschlossenen Kugeln vom Radius $\varepsilon_k(X)$. Wir definieren $Z_1 = B(x_1, \varepsilon_k(X))$ und induktiv $Z_i = B(x_i, \varepsilon_k(X)) \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} Z_j$ für $2 \leq i \leq k$ und erhalten so eine Zerlegung $\mathcal{Z} = \{Z_1, Z_2, \dots, Z_k\}$ von X . Im Fall $k = 1$ ist \mathcal{Z} trivialerweise kontrollierbar. Für $k \geq 2$ folgt die Kontrollierbarkeit gemäß

$$\varepsilon_1(Z_i) \leq \varepsilon_1(B(x_i, \varepsilon_k(X))) \leq \varepsilon_k(X) < \varepsilon_{k-1}(X)$$

für $1 \leq i \leq k$. Demnach gehört die Treppenfunktion

$$\hat{\varphi} = \sum_{i=1}^k f(x_i) \mathbf{1}_{Z_i} \tag{2.42}$$

zur Klasse $\hat{\Phi}_m(X)$. Für jeden Punkt $x \in X$ gibt es einen eindeutig bestimmten Index $i_0 \in \{1, 2, \dots, k\}$, so daß x in Z_{i_0} liegt, also $x \in Z_{i_0} \subseteq B(x_{i_0}, \varepsilon_k(X))$. Deshalb gilt

$$|f(x) - \hat{\varphi}(x)| = |f(x) - f(x_{i_0})| \leq \omega(f, d(x, x_{i_0})) \leq \omega(f, \varepsilon_k(X)) = \omega(f, \varepsilon_m(X)) .$$

Daraus folgt schließlich $\|f - \hat{\varphi}\| \leq \omega(f, \varepsilon_m(X))$ und

$$\hat{\alpha}_m(f) \leq \|f - \hat{\varphi}\| \leq \omega(f, \varepsilon_m(X)) ,$$

was zu zeigen war. \square

Für die Approximation stetiger Funktionen, den Schwerpunkt unserer Betrachtungen, besagt die Fehlerabschätzung, daß jede Funktion $f \in C(X)$ beliebig gut durch kontrollierbare Treppenfunktionen angenähert werden kann. Für unstetige Funktionen $f \in M(X) \setminus C(X)$ gilt dagegen die Aussage $\lim_{\delta \rightarrow +0} \omega(f, \delta) = 0$ nicht, so daß Satz 2.15 hier weniger wertvoll ist. In der Tat zeigen Beispiele, daß die Vereinigung $\bigcup_{m=1}^{\infty} \hat{\Phi}_m(X)$ der Approximationsklassen i.a. nicht dicht in $M(X)$ liegt.

Formel (2.42) aus dem Beweis von Satz 2.15 zeigt insbesondere, daß der Zusammenhang zwischen $f \in M(X)$ und der benutzten Approximationsfunktion $\hat{\varphi}$ linear

ist. Es gibt also einen linearen stetigen Operator $A_m : M(X) \rightarrow M(X)$ mit Werten in $\hat{\Phi}_m(X)$, wobei

$$\hat{a}_m(f) \leq \|f - A_m f\| \leq \omega(f, \varepsilon_m(X)) .$$

Die angegebene Fehlerabschätzung ist also in diesem *sehr konstruktiven* Sinne erreichbar.

2.2.2 Eine inverse Abschätzung

Wir betrachten nun wieder den Raum $(X, d) = ([0, 2]^n, d_{\max})$ genauer. Bei der Approximation durch Treppenfunktionen wollen wir folgende Hilfsaussage anwenden, die sich leicht aus dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen ergibt.

Hilfssatz 2.16 *Sind J ein Jordanbogen, f eine stetige Funktion auf J und $\hat{\varphi}$ eine Treppenfunktion auf J , die höchstens l Werte annimmt, so gilt*

$$\|f - \hat{\varphi}\| \geq \frac{1}{2l} \left(\max f(J) - \min f(J) \right) . \quad \square$$

Im Gegensatz zur Approximation mittels kontrollierbarer Zerlegungen der Einheit erlaubt die Approximation durch Treppenfunktionen eine wegen ihrer Universalität bedeutend schärfere inverse Aussage zu Satz 2.15 (vgl. [Ri2]).

Satz 2.17 *Für alle stetigen Funktionen $f \in C([0, 2]^n)$ und alle natürlichen Zahlen $m \geq 1$ gilt*

$$\hat{a}_m(f) \geq 2^{-(n+2)} \cdot \omega(f, \varepsilon_m([0, 2]^n)) .$$

Beweis: Es seien f und m fixiert. Wegen der Stetigkeit von f gibt es zwei Punkte $x, y \in [0, 2]^n$, so daß

$$\omega(f, \varepsilon_m([0, 2]^n)) = |f(x) - f(y)| \quad \text{und} \quad d_{\max}(x, y) \leq \varepsilon_m([0, 2]^n) .$$

Nach (2.1) gilt

$$\varepsilon_m([0, 2]^n) = \frac{1}{l} \quad \text{mit} \quad m \in \{l^n, l^n + 1, \dots, (l+1)^n - 1\} .$$

Wir betrachten nun eine beliebige kontrollierbare Treppenfunktion $\hat{\varphi} \in \hat{\Phi}_m([0, 2]^n)$. Diese besitzt eine Darstellung $\hat{\varphi} = \sum_{i=1}^{h^n} \lambda_i \mathbf{1}_{Z_i}$ mit einer kontrollierbaren Zerlegung $\mathcal{Z} = \{Z_1, Z_2, \dots, Z_{h^n}\}$, wobei wegen der Einschränkung $h^n \leq m$ die Ungleichung $h \leq l$ gelten muß. Wir können Hilfssatz 2.11 auf die Zerlegung \mathcal{Z} und die Punkte $x, y \in [0, 2]^n$ anwenden, denn es gilt $d_{\max}(x, y) \leq \varepsilon_m([0, 2]^n) = \frac{1}{l} < \frac{2}{h}$. Demnach existiert ein Jordanbogen $J \subseteq [0, 2]^n$ von x nach y , auf dem die Funktion $\hat{\varphi}$ höchstens 2^{n+1} Werte annimmt. Hilfssatz 2.16 erlaubt nun die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|f - \hat{\varphi}\| &\geq \|f|_J - \hat{\varphi}|_J\|_J \geq \frac{1}{2 \cdot 2^{n+1}} (\max f(J) - \min f(J)) \\ &\geq 2^{-(n+2)} \cdot |f(x) - f(y)| = 2^{-(n+2)} \cdot \omega(f, \varepsilon_m([0, 2]^n)) . \end{aligned}$$

Durch Übergang zum Infimum über alle Funktionen $\hat{\varphi} \in \hat{\Phi}_m([0, 2]^n)$ erhalten wir schließlich

$$\hat{a}_m(f) \geq 2^{-(n+2)} \cdot \omega(f, \varepsilon_m([0, 2]^n)) .$$

Damit ist Satz 2.17 bewiesen. \square

Aus Satz 2.17 ergibt sich, daß durch die Folge $(\hat{a}_m(f))_{m=1}^\infty$ der Approximationszahlen einer stetigen Funktion $f \in C([0, 2]^n)$ das asymptotische Verhalten der Zahlen $\omega(f, \varepsilon_m([0, 2]^n))$, $m \geq 1$, und damit die komplette Asymptotik des Stetigkeitsmoduls $\omega(f, \delta)$ für $\delta \rightarrow +0$ charakterisiert ist. In diesem Sinne ist das neue Approximationsschema dem vorher betrachteten weit überlegen. Der Preis für diesen Vorteil besteht jedoch darin, daß wir uns der Hilfe von Funktionen aus dem größeren Raum $M(X)$ bedienen müssen.

In [Ri4] wird eine zu Satz 2.17 analoge inverse Abschätzung für eine größere Klasse kompakter metrischer Räume – nämlich für spezielle Räume sogenannter *endlicher konvexer Deformation* – bewiesen. Für den Würfel $([0, 2]^n, d_{\max})$ bedeutet die dortige Aussage

$$\hat{a}_m(f) \geq \frac{1}{2 \cdot 6^n} \omega(f, \varepsilon_m([0, 2]^n)) .$$

Durch Ausnutzung der speziellen geometrischen Struktur des Würfels konnten wir die Konstante $\frac{1}{2 \cdot 6^n}$ aus dieser allgemeineren Abschätzung zu $\frac{1}{4 \cdot 2^n}$ im Satz 2.17 verbessern.

Eine zweite Optimalitätsaussage zu Satz 2.15 ähnelt in ihrer Struktur stark dem Satz 2.14. Anhand einer Beipiefunktion zeigen wir, daß die Fehlerabschätzung aus Satz 2.15 nicht weiter verbessert werden kann (vgl. [Ri2]).

Satz 2.18 *Es sei $f_0 \in C([0, 2]^n)$ die Funktion $f_0(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1$. Dann gilt für jede natürliche Zahl $m \geq 1$ die Gleichung*

$$\hat{a}_m(f_0) = \omega(f_0, \varepsilon_m([0, 2]^n)) .$$

Beweis: Zu fixiertem m wählen wir die eindeutig bestimmte natürliche Zahl $l \geq 1$ mit $l^n \leq m < (l+1)^n$. Mit Hilfe von (2.1) erhalten wir damit

$$\omega(f_0, \varepsilon_m([0, 2]^n)) = \omega\left(f_0, \frac{1}{l}\right) = \frac{1}{l} .$$

Wir betrachten nun eine beliebige Treppenfunktion $\hat{\varphi} \in \hat{\Phi}_m([0, 2]^n)$. Da der Würfel $[0, 2]^n$ nur kontrollierbare Zerlegungen der Kardinalitäten $1^n, 2^n, 3^n, \dots$ zuläßt, gibt es eine Zahl $j \in \{1, 2, \dots, l\}$ und eine j^n -elementige kontrollierbare Zerlegung $\mathcal{Z} = \{Z_i : 1 \leq i \leq j^n\}$ von $[0, 2]^n$, so daß $\hat{\varphi} = \sum_{i=1}^{j^n} \lambda_i \mathbf{1}_{Z_i}$. Die Einschränkung $\hat{\varphi}|_F$ auf die eindimensionale Facette $F = [0, 2] \times \{0\}^{n-1}$ ist nach Satz 2.9 eine Treppenfunktion auf einer j -elementigen kontrollierbaren Zerlegung von F . Deshalb kann $\hat{\varphi}|_F$ höchstens $j \leq l$ verschiedene Werte annehmen. Unter Anwendung des Hilfssatzes 2.16 auf den Jordanbogen F erhalten wir

$$\|f_0 - \hat{\varphi}\| \geq \|f_0|_F - \hat{\varphi}|_F\|_F \geq \frac{1}{2l} (\max f_0(F) - \min f_0(F))$$

$$= \frac{1}{2l}(2-0) = \frac{1}{l} = \omega(f_0, \varepsilon_m([0, 2]^n)) .$$

Durch Infimumsbildung über alle Funktionen $\hat{\varphi} \in \hat{\Phi}_m([0, 2]^n)$ folgt schließlich

$$\hat{a}_m(f_0) \geq \omega(f_0, \varepsilon_m([0, 2]^n)) .$$

Mit der dazu inversen Abschätzung aus Satz 2.15 erhalten wir die zu verifizierende Gleichheit. \square

2.2.3 Ketten kontrollierbarer Zerlegungen des Würfels

Zum Abschluß wollen wir die Frage diskutieren, ob eine gegebene Zerlegung \mathcal{Z} des Würfels $[0, 2]^n$ zu einer kontrollierbaren Zerlegung $\tilde{\mathcal{Z}}$ *verfeinert* werden kann (vgl. [Ri3]). Ist beispielsweise eine Treppenfunktion ψ auf der Zerlegung \mathcal{Z} definiert, wobei \mathcal{Z} nicht notwendig kontrollierbar sein soll, und besitzt \mathcal{Z} eine kontrollierbare Verfeinerung $\tilde{\mathcal{Z}}$, dann ist ψ natürlich auch eine Treppenfunktion auf $\tilde{\mathcal{Z}}$ und somit eine kontrollierbare Treppenfunktion. In diesem Sinne stellt sich die Frage nach der Existenz einer kontrollierbaren Verfeinerung zu einer vorgegebenen Zerlegung, wenn man die Kontrollierbarkeit einer gegebenen Treppenfunktion überprüfen will.

Wir sprechen von einer *Kette* $(\mathcal{Z}_m)_{m=1}^\infty$ *von Zerlegungen*, wenn jede Zerlegung \mathcal{Z}_{m+1} eine *echte Verfeinerung* von \mathcal{Z}_m darstellt. Für uns sind *Ketten kontrollierbarer Zerlegungen* von besonderem Interesse. Ist $(\mathcal{Z}_m)_{m=1}^\infty$ eine solche Kette auf einem kompakten metrischen Raum X , und bezeichnet Ψ_m die Menge aller Treppenfunktionen auf \mathcal{Z}_m , dann ist ein Approximationsschema

$$\Psi_1 \subset \Psi_2 \subset \Psi_3 \subset \dots \subset M(X)$$

aus Räumen der Dimensionen $\dim(\Psi_m) = \text{card}(\mathcal{Z}_m) = k_m$ gegeben. Wegen der Kontrollierbarkeit gilt $\varepsilon_1(Z) < \varepsilon_{k_m-1}(X)$ für alle $Z \in \mathcal{Z}_m$. Ähnlich wie im Beweis von Satz 2.15 kann man für jede Funktion $f \in M(X)$ durch Angabe einer geeigneten Funktion aus Ψ_m zeigen, daß

$$\inf\{\|f - \psi\| : \psi \in \Psi_m\} \leq \omega(f, \varepsilon_{k_m-1}(X)) .$$

Das zur Kette $(\mathcal{Z}_m)_{m=1}^\infty$ gehörige Approximationsschema erlaubt also eine sinnvolle Fehlerabschätzung. Insbesondere kann jede stetige Funktion $f \in C(X)$ beliebig gut durch Funktionen aus $\bigcup_{m=1}^\infty \Psi_m$ angenähert werden. Dieses Vorgehen ist für jede beliebige Kette kontrollierbarer Zerlegungen möglich.

Die Frage nach der Existenz von kontrollierbaren Verfeinerungen vorgegebener Zerlegungen ist offenbar eng mit der Frage nach der Existenz von Ketten kontrollierbarer Zerlegungen bzw. der zugehörigen Approximationsschemata verbunden. Als einführendes Beispiel betrachten wir die durch sukzessive Seitenhalbierung erzeugte Kette $(\mathcal{Z}_m)_{m=1}^\infty$ auf dem Würfel $([0, 2]^n, d_{\max})$ mit

$$\mathcal{Z}_m = \{I_{h_1}^m \times I_{h_2}^m \times \dots \times I_{h_n}^m : (h_1, h_2, \dots, h_n) \in \{1, 2, \dots, 2^m\}^n\}$$

und

$$I_h^m = \begin{cases} \left[\frac{2(h-1)}{2^m}, \frac{2h}{2^m} \right) & \text{für } h = 1, 2, \dots, 2^m - 1, \\ \left[\frac{2(2^m-1)}{2^m}, \frac{2 \cdot 2^m}{2^m} \right] & \text{für } h = 2^m. \end{cases}$$

Die m -te Zerlegung \mathcal{Z}_m besteht offenbar aus $(2^m)^n$ Würfeln der Kantenlänge $\frac{2}{2^m}$. Es gilt also

$$\varepsilon_1(Z) = \frac{1}{2^m} < \frac{1}{2^{m-1}} = \varepsilon_{(2^m)^{n-1}}([0, 2]^n) \quad \text{für alle } Z \in \mathcal{Z}_m.$$

Somit liegt eine Kette kontrollierbarer Zerlegungen vor.

Wir wollen nun eine Klasse von Würfelzerlegungen charakterisieren, die alle eine kontrollierbare Verfeinerung besitzen und durch sukzessives Verfeinern sogar zu Ketten kontrollierbarer Zerlegungen Anlaß geben. Sind $I_1, I_2, \dots, I_n \subseteq [0, 2]$ nicht notwendig abgeschlossene Intervalle positiver Länge, dann nennen wir die Menge

$$Q = I_1 \times I_2 \times \dots \times I_n \subseteq [0, 2]^n$$

einen *Quader*. Das Intervall I_k wird als die k -te *Kante* von Q bezeichnet. Die hier betrachteten Quader liegen also immer achsenparallel, sind aber nicht notwendig abgeschlossen. Beispiele sind die Würfel aus den Zerlegungen der eben betrachteten Kette $(\mathcal{Z}_m)_{m=1}^\infty$. Die erste Entropiezahl des Quaders Q berechnet sich offenbar gemäß

$$\varepsilon_1(Q) = \frac{1}{2} \max_{k=1,2,\dots,n} \nu(I_k),$$

wobei ν für das eindimensionale Lebesguemaß steht.

Satz 2.19 *Es sei $\mathcal{Z} = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_m\}$ eine Zerlegung des Würfels $[0, 2]^n$ in m Quader Q_i . Dann gibt es eine kontrollierbare echte Verfeinerung $\tilde{\mathcal{Z}}$ von \mathcal{Z} , die ebenfalls nur aus Quadern besteht.*

Zum Beweis dieser Aussage müssen wir auf ein Lemma über die simultane Approximierbarkeit reeller Zahlen zurückgreifen.

Lemma 2.20 ([Ca], S. 14) *Zu je m_0 vorgegebenen reellen Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m_0}$ existieren stets unendlich viele natürliche Zahlen $l \in \mathbb{N}$, so daß*

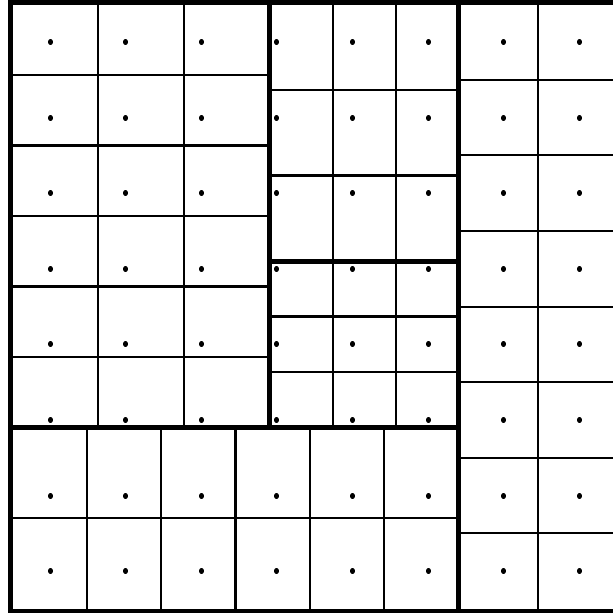
$$l^{\frac{1}{m_0}} \cdot \max \{ \min \{ |l\lambda_h - z| : z \in \mathbb{Z} \} : h = 1, 2, \dots, m_0 \} < 1. \quad \square$$

Beweis von Satz 2.19: Jeder Quader Q_i , $1 \leq i \leq m$, besitzt eine Darstellung

$$Q_i = I_1^i \times I_2^i \times \dots \times I_n^i.$$

Mit x_{k1}^i und x_{k2}^i bezeichnen wir den linken bzw. den rechten Endpunkt der k -ten Kante I_k^i von Q_i . Dann gilt offenbar

$$\nu(I_k^i) = x_{k2}^i - x_{k1}^i. \quad (2.43)$$

Abbildung 2.2: Verfeinerung von \mathcal{Z}

Die kleinste Länge aller Kanten aller Quader aus \mathcal{Z} sei

$$y = \min \{ \nu(I_k^i) : i \in \{1, 2, \dots, m\}, k \in \{1, 2, \dots, n\} \} > 0. \quad (2.44)$$

Es sei $M = \left\{ \frac{1}{2} x_{kj}^i : i \in \{1, 2, \dots, m\}, k \in \{1, 2, \dots, n\}, j \in \{1, 2\} \right\}$. Wir setzen $m_0 = \text{card}(M)$ und schreiben $M = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m_0}\}$. Nach Lemma 2.20 gibt es eine natürliche Zahl l mit

$$l > \left(\frac{4}{y} \right)^{m_0} \quad (2.45)$$

und

$$l^{\frac{1}{m_0}} \cdot \max \{ \min \{ |l\lambda_h - z| : z \in \mathbb{Z} \} : h = 1, 2, \dots, m_0 \} < 1.$$

Die letzte Ungleichung ist äquivalent zu

$$\min \left\{ \left| 2\lambda_h - \frac{2z}{l} \right| : z \in \mathbb{Z} \right\} < \frac{2}{l \cdot l^{\frac{1}{m_0}}} \quad \text{für} \quad h = 1, 2, \dots, m_0$$

und unter Berücksichtigung der Definition von $M = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m_0}\}$ auch zu

$$\min \left\{ \left| x_{kj}^i - \frac{2z}{l} \right| : z \in \mathbb{Z} \right\} < \frac{2}{l \cdot l^{\frac{1}{m_0}}} \quad (2.46)$$

für $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ und $j \in \{1, 2\}$.

Weiterhin definieren wir

$$l_k^i = \text{card} \left(I_k^i \cap \left\{ \frac{1}{l}, \frac{3}{l}, \frac{5}{l}, \dots, 2 - \frac{5}{l}, 2 - \frac{3}{l}, 2 - \frac{1}{l} \right\} \right) \quad (2.47)$$

für $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ und $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Wegen $y \leq 2 < 4$ und (2.45) gilt $l > \frac{4}{y}$ und folglich $y > \frac{4}{l}$. Aufgrund von (2.44) erhalten wir $\nu(I_k^i) > \frac{4}{l}$ und damit $l_k^i \geq 2$

für alle $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ und $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Wir zerlegen nun jeden Quader Q_i in $l_1^i l_2^i \dots l_n^i$ Teilquader mit den Kantenlängen $\frac{\nu(I_1^i)}{l_1^i}$ (erste Kante, parallel zu I_1^i), $\frac{\nu(I_2^i)}{l_2^i}$ (zweite Kante, parallel zu I_2^i), ..., $\frac{\nu(I_n^i)}{l_n^i}$ (n -te Kante, parallel zu I_n^i), ähnlich wie bei der oben konstruierten Kette kontrollierbarer Zerlegungen des Würfels. (Dabei bestehen gewisse Freiheiten bei der Wahl von offenen, halboffenen bzw. abgeschlossenen Kanten.) Abbildung 2.2 illustriert das Vorgehen an einem Beispiel mit $n = 2$, $m = 5$ und $l = 8$. Außerdem ist das Gitter $\{\frac{1}{l}, \frac{3}{l}, \frac{5}{l}, \dots, 2 - \frac{1}{l}\}^n$ dargestellt.

Mit $\tilde{\mathcal{Z}}$ bezeichnen wir die Menge aller Teilquader, die durch die Zerlegungen der Quader $Q_i \in \mathcal{Z}$, $1 \leq i \leq m$, entstehen. Da jede Menge Q_i in $l_1^i l_2^i \dots l_n^i \geq 2^n > 1$ Teile zerlegt wird, ist $\tilde{\mathcal{Z}}$ eine echte Verfeinerung von \mathcal{Z} . Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}
 \text{card}(\tilde{\mathcal{Z}}) &= \sum_{i=1}^m l_1^i l_2^i \dots l_n^i \\
 &= \sum_{i=1}^m \text{card}(I_1^i \cap \{\frac{1}{l}, \frac{3}{l}, \dots, 2 - \frac{1}{l}\}) \cdot \dots \cdot \text{card}(I_n^i \cap \{\frac{1}{l}, \frac{3}{l}, \dots, 2 - \frac{1}{l}\}) \\
 &= \sum_{i=1}^m \text{card}((I_1^i \cap \{\frac{1}{l}, \frac{3}{l}, \dots, 2 - \frac{1}{l}\}) \times \dots \times (I_n^i \cap \{\frac{1}{l}, \frac{3}{l}, \dots, 2 - \frac{1}{l}\})) \\
 &= \sum_{i=1}^m \text{card}((I_1^i \times I_2^i \times \dots \times I_n^i) \cap \{\frac{1}{l}, \frac{3}{l}, \dots, 2 - \frac{1}{l}\}^n) \\
 &= \sum_{i=1}^m \text{card}(Q_i \cap \{\frac{1}{l}, \frac{3}{l}, \dots, 2 - \frac{1}{l}\}^n) \\
 &= \text{card}((Q_1 \cup Q_2 \cup \dots \cup Q_m) \cap \{\frac{1}{l}, \frac{3}{l}, \dots, 2 - \frac{1}{l}\}^n) \\
 &= \text{card}([0, 2]^n \cap \{\frac{1}{l}, \frac{3}{l}, \dots, 2 - \frac{1}{l}\}^n) \\
 &= \text{card}(\{\frac{1}{l}, \frac{3}{l}, \dots, 2 - \frac{1}{l}\}^n) \\
 &= l^n.
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

Zum Nachweis der Kontrollierbarkeit von $\tilde{\mathcal{Z}}$ verifizieren wir zunächst die Ungleichung

$$\frac{4}{l^{\frac{1}{m_0}} \cdot \nu(I_k^i)} < 1 \quad \text{für alle} \quad i \in \{1, 2, \dots, m\}, k \in \{1, 2, \dots, n\}. \tag{2.49}$$

Offenbar ergeben sich aus (2.45) und (2.44) die Abschätzungen $l > \left(\frac{4}{\nu(I_k^i)}\right)^{m_0}$, $l^{\frac{1}{m_0}} > \frac{4}{\nu(I_k^i)}$ und somit (2.49).

Wir betrachten nun einen beliebigen Quader $\tilde{Q} \in \tilde{\mathcal{Z}}$. Nach Konstruktion von $\tilde{\mathcal{Z}}$ gibt es einen Index $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, so daß $\tilde{Q} \subseteq Q_i$. Die Kantenlängen von \tilde{Q} sind deshalb $\frac{\nu(I_k^i)}{l_k^i}$ ($k = 1, 2, \dots, n$), und die erste Entropiezahl von \tilde{Q} beträgt

$$\varepsilon_1(\tilde{Q}) = \frac{1}{2} \max_{k=1,2,\dots,n} \frac{\nu(I_k^i)}{l_k^i}. \tag{2.50}$$

Es sei nun $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ fixiert. Nach (2.47) existiert ein $j_0 \in \{0, 1, \dots, l-1\}$

mit

$$I_k^i \cap \left\{ \frac{1}{l}, \frac{3}{l}, \dots, 2 - \frac{1}{l} \right\} = \left\{ \frac{2(j_0 + 1) - 1}{l}, \frac{2(j_0 + 2) - 1}{l}, \dots, \frac{2(j_0 + l_k^i) - 1}{l} \right\}.$$

Für die Endpunkte x_{k1}^i und x_{k2}^i von I_k^i bedeutet dies:

$$x_{k1}^i \in \left[\frac{2(j_0 + 1) - 1}{l} - \frac{2}{l}, \frac{2(j_0 + 1) - 1}{l} \right] = \left[\frac{2j_0 - 1}{l}, \frac{2j_0 + 1}{l} \right],$$

folglich

$$\min \left\{ \left| x_{k1}^i - \frac{2z}{l} \right| : z \in \mathbb{Z} \right\} = \left| x_{k1}^i - \frac{2j_0}{l} \right|$$

und nach (2.46)

$$x_{k1}^i > \frac{2j_0}{l} - \frac{2}{l \cdot l^{\frac{1}{m_0}}}$$

bzw. analog

$$x_{k2}^i \in \left[\frac{2(j_0 + l_k^i) - 1}{l}, \frac{2(j_0 + l_k^i) - 1}{l} + \frac{2}{l} \right] = \left[\frac{2(j_0 + l_k^i) - 1}{l}, \frac{2(j_0 + l_k^i) + 1}{l} \right],$$

somit

$$\min \left\{ \left| x_{k2}^i - \frac{2z}{l} \right| : z \in \mathbb{Z} \right\} = \left| x_{k2}^i - \frac{2(j_0 + l_k^i)}{l} \right|$$

und mit (2.46)

$$x_{k2}^i < \frac{2(j_0 + l_k^i)}{l} + \frac{2}{l \cdot l^{\frac{1}{m_0}}}.$$

Gleichung (2.43) zeigt, daß

$$\nu(I_k^i) = x_{k2}^i - x_{k1}^i < \frac{2(j_0 + l_k^i)}{l} + \frac{2}{l \cdot l^{\frac{1}{m_0}}} - \frac{2j_0}{l} + \frac{2}{l \cdot l^{\frac{1}{m_0}}} = \frac{2}{l} \left(l_k^i + 2 \frac{1}{l^{\frac{1}{m_0}}} \right)$$

und damit, unter Ausnutzung von (2.49), daß

$$l_k^i > \frac{1}{2} \nu(I_k^i) l - 2 \frac{1}{l^{\frac{1}{m_0}}} = \frac{1}{2} \nu(I_k^i) \left(l - \frac{4}{l^{\frac{1}{m_0}} \nu(I_k^i)} \right) > \frac{1}{2} \nu(I_k^i) (l - 1).$$

Daraus folgt

$$\frac{\nu(I_k^i)}{l_k^i} < \frac{2}{l - 1}.$$

Diese Ungleichung gilt für alle $k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Nach (2.50) und unter Berücksichtigung von (2.48) erhalten wir daraus

$$\varepsilon_1(\tilde{Q}) < \frac{1}{l - 1} = \varepsilon_{l^n - 1}([0, 2]^n) = \varepsilon_{\text{card}(\bar{Z}) - 1}([0, 2]^n).$$

Dies ist gerade das Kriterium für die Kontrollierbarkeit von \tilde{Z} . Damit ist Satz 2.19 bewiesen. \square

Durch iterative Anwendung von Satz 2.19 erhalten wir eine Existenzaussage über Ketten kontrollierbarer Zerlegungen auf $([0, 2]^n, d_{\max})$.

Folgerung 2.21 *Es sei Z_1 eine kontrollierbare Zerlegung des Würfels $[0, 2]^n$ in Mengen, die jeweils als disjunkte Vereinigungen endlich vieler Quader darstellbar sind. Dann kann Z_1 zu einer Kette $(Z_m)_{m=1}^\infty$ kontrollierbarer Zerlegungen von $[0, 2]^n$ fortgesetzt werden. \square*

Nach Satz 2.15 ist jede stetige Funktion $f \in C([0, 2]^n)$ *approximierbar* im Sinne von

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \hat{a}_m(f) = 0.$$

Da die Approximation aber nicht durch stetige Funktionen vorgenommen wird, ist zu erwarten, daß noch viele weitere Funktionen $f \in M([0, 2]^n) \setminus C([0, 2]^n)$ approximierbar sind. Mit Hilfe von Satz 2.19 können wir für den eindimensionalen Fall $n = 1$ eine wichtige Klasse derartiger Funktionen charakterisieren. Dazu greifen wir auf Begriffe aus [Au], S. 237, zurück. Eine Funktion $f \in M[0, 2]$ wird *Regelfunktion* genannt, wenn sie in jedem Punkt $x_0 \in (0, 2)$ einen linksseitigen und einen rechtsseitigen Limes $f(x_0-) = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$ bzw. $f(x_0+) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$ und in den Endpunkten 0 und 2 den entsprechenden einseitigen Limes besitzt. Regelfunktionen spielen in der Integralrechnung eine wichtige Rolle, da sie stets eine Stammfunktion besitzen. In [Au] wird gezeigt, daß jede Regelfunktion als gleichmäßiger Limes einer Folge sogenannter *Elementartreppenfunktionen* darstellbar ist. Dabei heißt $g \in M[0, 2]$ *Elementartreppenfunktion*, wenn es eine endliche Unterteilung $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_m = 2$ von $[0, 2]$ gibt, so daß g auf jedem offenen Intervall (a_{i-1}, a_i) , $1 \leq i \leq m$, konstant ist.

In leichter Einschränkung des Begriffes aus [Au] nennen wir eine Funktion $g \in M[0, 2]$ eine *spezielle Elementartreppenfunktion*, falls es eine Zerlegung von $[0, 2]$ in endlich viele Intervalle positiver Länge gibt, auf denen g jeweils konstant ist. Eine spezielle Elementartreppenfunktion ist demnach eine Elementartreppenfunktion, die zusätzlich in jedem Punkt a_i der zugehörigen Unterteilung von $[0, 2]$ links- oder rechtsseitig stetig ist. Aus Satz 2.19 erkennen wir, daß jede spezielle Elementartreppenfunktion eine kontrollierbare Treppenfunktion ist. Weiterhin sprechen wir von einer *speziellen Regelfunktion* $f \in M[0, 2]$, falls f eine Regelfunktion ist, die außerdem in jedem Punkt $x_0 \in [0, 2]$ links- oder rechtsseitig stetig ist. Der Funktionswert $f(x_0)$ muß also mit einem der beiden Limes $f(x_0-)$ bzw. $f(x_0+)$ übereinstimmen. Man kann nun ähnlich wie bei [Au] zeigen, daß jede spezielle Regelfunktion $f \in M[0, 2]$ eine Darstellung als gleichmäßiger Limes einer Folge spezieller Elementartreppenfunktionen besitzt. Also kann f durch kontrollierbare Treppenfunktionen beliebig gut approximiert werden.

Folgerung 2.22 *Jede spezielle Regelfunktion $f \in M[0, 2]$ ist approximierbar im Sinne von*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \hat{a}_m(f) = 0. \quad \square$$

Wir beschließen diesen Abschnitt mit drei Beispielen zu Verfeinerbarkeitsfragen kontrollierbarer Zerlegungen im eindimensionalen Fall $n = 1$. Alle Beispiele sind auf

höhere Dimensionen übertragbar. Aus technischen Gründen betrachten wir statt $[0, 2]$ das Intervall $[-1, 1]$. Die erste Entropiezahl einer Teilmenge $M \subseteq [-1, 1]$ ist offensichtlich

$$\varepsilon_1(M) = \frac{1}{2} \sup\{|x - y| : x, y \in M\}.$$

Beispiel 1 Wir untersuchen die Zerlegung $\mathcal{Z} = \{A, B\}$ von $[-1, 1]$ mit

$$\begin{aligned} A &= \left[-1, -\frac{2}{3}\right) \cup \left\{x \in \left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right] : x \text{ ist rational}\right\}, \\ B &= \left\{x \in \left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right] : x \text{ ist irrational}\right\} \cup \left(\frac{2}{3}, 1\right]. \end{aligned}$$

Wegen $\varepsilon_1(A) = \varepsilon_1(B) = \frac{5}{6} < 1 = \varepsilon_1([-1, 1])$ ist \mathcal{Z} kontrollierbar. Wir wollen im Sinne eines indirekten Beweises zeigen, daß \mathcal{Z} keine kontrollierbare echte Verfeinerung $\tilde{\mathcal{Z}}$ besitzt.

Zunächst nehmen wir die Existenz einer dreielementigen derartigen Zerlegung $\tilde{\mathcal{Z}} = \{Z_1, Z_2, Z_3\}$ an. O.B.d.A. gelte $-1 \in Z_1$ und $1 \in Z_3$. Wegen der Kontrollierbarkeit erfüllt die Feinheit $F(\tilde{\mathcal{Z}}) = \max\{\varepsilon_1(Z_1), \varepsilon_1(Z_2), \varepsilon_1(Z_3)\}$ von $\tilde{\mathcal{Z}}$ die Beschränkung $F(\tilde{\mathcal{Z}}) < \varepsilon_2([-1, 1]) = \frac{1}{2}$. Es gilt

$$Z_1 \subseteq \left[-1, -1 + 2F(\tilde{\mathcal{Z}})\right], \quad Z_3 \subseteq \left[1 - 2F(\tilde{\mathcal{Z}}), 1\right]$$

und

$$\left(-1 + 2F(\tilde{\mathcal{Z}}), 1 - 2F(\tilde{\mathcal{Z}})\right) \subseteq [-1, 1] \setminus (Z_1 \cup Z_3) = Z_2.$$

Damit enthält Z_2 eine offene Umgebung des Nullpunktes, also sowohl Punkte aus A als auch aus B . Darum kann $\tilde{\mathcal{Z}}$ keine Verfeinerung von \mathcal{Z} sein.

Nun nehmen wir an, die Verfeinerung $\tilde{\mathcal{Z}} = \{Z_1, Z_2, \dots, Z_k\}$ habe eine Kardinalität $k = \text{card}(\tilde{\mathcal{Z}}) \geq 4$. Die Kontrollierbarkeit von $\tilde{\mathcal{Z}}$ bedeutet

$$\varepsilon_1(Z_i) < \frac{1}{k-1} \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

O.B.d.A. gelte $0 \in Z_1$. Aus $k \geq 4$ folgt $\varepsilon_1(Z_1) < \frac{1}{3}$ und damit $Z_1 \subseteq \left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right]$. Außerdem gilt wegen der Verfeinerungseigenschaft die Inklusion $Z_1 \subseteq A$, denn $0 \in Z_1 \cap A$. Wir erhalten $Z_1 \subseteq \left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right] \cap A$; also ist Z_1 eine Nullmenge bezüglich des Lebesguemaßes:

$$\nu(Z_1) = 0.$$

Die Abschlüsse $\text{cl}(Z_i)$, $2 \leq i \leq k$, der Mengen Z_i sind meßbar, wobei

$$\nu(\text{cl}(Z_i)) \leq 2\varepsilon_1(\text{cl}(Z_i)) = 2\varepsilon_1(Z_i) < \frac{2}{k-1} \quad \text{für} \quad 2 \leq i \leq k.$$

Damit erhalten wir die Abschätzung

$$\nu(Z_1) + \nu(\text{cl}(Z_2)) + \nu(\text{cl}(Z_3)) + \dots + \nu(\text{cl}(Z_k)) < 2$$

im Widerspruch dazu, daß $\{Z_1, \text{cl}(Z_2), \text{cl}(Z_3), \dots, \text{cl}(Z_k)\}$ eine Überdeckung von $[-1, 1]$ ist.

Beispiel 1 zeigt, daß nicht jede kontrollierbare Zerlegung eine kontrollierbare echte Verfeinerung besitzt und deshalb i.a. auch nicht im Sinne von Folgerung 2.21 zu einer Kette kontrollierbarer Zerlegungen fortsetzbar ist. Insbesondere sind Satz 2.19 und Folgerung 2.21 keine trivialen Aussagen.

Beispiel 2 Wir betrachten die Folge $(\mathcal{Z}_m)_{m=0}^\infty$ der Mengensysteme $\mathcal{Z}_m \subseteq 2^{[-1,1]}$ mit

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}_m &= \mathcal{M}_m \cup \mathcal{N}_m \cup \{A_m, B_m\} \quad \text{und} \\ \mathcal{M}_m &= \left\{ \left(2i \cdot 2^{-2^m}, 2(i+1) \cdot 2^{-2^m} \right] : i \in \{1, 2, \dots, 2^{2^m-1} - 1\} \right\}, \\ \mathcal{N}_m &= \{-Z : Z \in \mathcal{M}_m\}, \\ A_m &= \bigcup_{i=m}^\infty (-1)^i \left(2 \cdot 2^{-2^{i+1}}, 2 \cdot 2^{-2^i} \right], \\ B_m &= -A_m \cup \{0\},\end{aligned}$$

wobei $\mathcal{M}_0 = \mathcal{N}_0 = \emptyset$ zu lesen ist. Die Systeme \mathcal{M}_m und \mathcal{N}_m enthalten jeweils $2^{2^m-1} - 1$ paarweise disjunkte halboffene Intervalle der Länge $2 \cdot 2^{-2^m}$ und überdecken die Bereiche $(2 \cdot 2^{-2^m}, 1]$ bzw. $[-1, -2 \cdot 2^{-2^m})$. Die ineinander verschachtelten Mengen A_m und B_m sind disjunkt und überdecken gemeinsam das Intervall $[-2 \cdot 2^{-2^m}, 2 \cdot 2^{-2^m}]$. Also ist jedes Mengensystem \mathcal{Z}_m , $m \geq 0$, eine Zerlegung von $[-1, 1]$. Man sieht leicht, daß die Folge $(\mathcal{Z}_m)_{m=1}^\infty$ sogar eine Kette bildet.

Zum Nachweis der Kontrollierbarkeit von \mathcal{Z}_m ist

$$\varepsilon_1(Z) < \frac{1}{2^{2^m} - 1} \quad \text{für alle} \quad Z \in \mathcal{Z}_m \quad (2.51)$$

zu zeigen, denn $\text{card}(\mathcal{Z}_m) = 2(2^{2^m-1} - 1) + 2 = 2^{2^m}$. Für die Intervalle Z aus \mathcal{M}_m bzw. \mathcal{N}_m ist diese Forderung offensichtlich erfüllt, denn es gilt $\varepsilon_1(Z) = 2^{-2^m}$. Die verbleibenden Zerlegungselemente $Z = A_m$ bzw. $Z = B_m$ haben die Eigenschaft

$$\begin{aligned}\varepsilon_1(Z) &= \frac{1}{2} \left(2 \cdot 2^{-2^m} + 2 \cdot 2^{-2^{m+1}} \right) = \frac{1}{2^{2^m}} + \frac{1}{2^{2^{m+1}}} \\ &= \frac{2^{2^m} + 1}{2^{2^{m+1}}} \frac{2^{2^m} - 1}{2^{2^m} - 1} = \frac{2^{2^{m+1}} - 1}{2^{2^{m+1}}} \frac{1}{2^{2^m} - 1} < \frac{1}{2^{2^m} - 1},\end{aligned}$$

so daß die Ungleichung (2.51) ebenfalls erfüllt ist. Mit $(\mathcal{Z}_m)_{m=0}^\infty$ liegt somit eine Kette kontrollierbarer Zerlegungen von $[-1, 1]$ vor.

Da die Mengen A_m und B_m keine Intervalle bzw. keine endlichen Vereinigungen von Intervallen sind, können Satz 2.19 und Folgerung 2.21 auf keine der Zerlegungen \mathcal{Z}_m , $m \geq 0$, angewandt werden. Dennoch besitzt jede dieser Zerlegungen \mathcal{Z}_m mit \mathcal{Z}_{m+1} eine kontrollierbare echte Verfeinerung, so daß $(\mathcal{Z}_k)_{k=m}^\infty$ eine von \mathcal{Z}_m ausgehende Kette kontrollierbarer Zerlegungen darstellt. Die in Satz 2.19 bzw. Folgerung 2.21 formulierten Kriterien sind demnach keine notwendigen Bedingungen.

Beispiel 3 Man kann zeigen, daß die kontrollierbare Zerlegung $\mathcal{Z} = \{A, B\}$ des Intervalls $[-1, 1]$ mit

$$A = \bigcup_{i=0}^\infty (-1)^i \left(2^{-(i+1)}, 2^{-i} \right] \quad \text{und} \quad B = -A \cup \{0\}$$

keine kontrollierbare echte Verfeinerung besitzt, obwohl \mathcal{Z} dieselbe topologische Struktur wie $\mathcal{Z}_0 = \{A_0, B_0\}$ aus dem vorigen Beispiel aufweist. Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer kontrollierbaren echten Verfeinerung zu einer vorgegebenen Zerlegung von $[-1, 1]$ kann also nicht nur ein topologisches Kriterium – wie etwa die hinreichende Bedingung aus Satz 2.19 im Fall $n = 1$ – sein. Dies überrascht insofern nicht, als das Kontrollierbarkeitskriterium aus Definition 2.1 eng an die Metrik des zugrunde liegenden Raumes geknüpft ist.

Die Beispiele verdeutlichen, daß die Frage nach der kontrollierbaren Verfeinerbarkeit vorgegebener Zerlegungen nicht trivial und sogar für den „elementaren“ metrischen Raum $[-1, 1]$ weitgehend ungelöst ist. Aus approximationstheoretischer Sicht bleibt dieses Problem aber für alle kompakten metrischen Räume von Interesse. Weiterhin stellt sich die Frage, welche Räume inverse Fehlerabschätzungen im Sinne von Satz 2.17 oder wenigstens Optimalitätsaussagen zu den *Jackson*-Abschätzungen in Analogie zu den Sätzen 2.14 und 2.18 erlauben. Die hier für den Würfel vorgestellten Ergebnisse sind deshalb auch als Ausgangspunkt für ein weites Feld von Forschungen in allgemeineren metrischen Räumen zu verstehen.

Kapitel 3

Pflasterbarkeit konvexer Mengen

In diesem Kapitel werden sehr spezielle disjunkte Zerlegungen von Mengen im Mittelpunkt stehen – die sogenannten Pflasterungen. Dabei geht es um die Frage, ob eine Punktmenge in eine gewisse Anzahl von Teilmengen zerlegt werden kann, die untereinander vermöge einer vorgegebenen Transformationsgruppe paarweise kongruent sind. Wie der Name „Pflasterung“ schon sagt, besitzt die Problemstellung einen sehr anschaulichen Hintergrund: So werden Straßen mit genormten Steinen gepflastert, die zueinander mehr oder weniger „kongruent“ sind. Die „Pflastersteine“ beim Hausbau sind Ziegel. Daneben stellt sich (z.B. in der Textilindustrie) auch oft die Frage, ob man ein Stück Rohmaterial ohne (oder nur mit geringem) Rest in Teilstücke einer vorgegebenen Form zerlegen kann.

Wir werden sehen, daß das Problem der Pflasterbarkeit von Mengen durch disjunkte Teilmengen auf teilweise überraschende Ergebnisse führt. So würde man beispielsweise die Frage nach der Teilbarkeit einer Kreisscheibe in zwei bezüglich der ebenen Bewegungsgruppe kongruente Hälften zunächst intuitiv positiv beantworten, da man sofort an ein „Zerschneiden“ des Kreises in zwei Halbkreise denkt. Probleme treten dann aber bei der Zuordnung der gemeinsamen Randpunkte der Halbkreise auf. Genauere Untersuchungen zeigen, daß die in Frage stehende Halbierung des Kreises unmöglich ist.

3.1 Einführung

Die Frage nach einem Beweis der Unmöglichkeit, eine Kreisfläche in zwei disjunkte kongruente Teile zu zerlegen, wurde von *B.L. van der Waerden* bereits 1949 in den „Elementen der Mathematik“ aufgeworfen (vgl. [vdW]). Neben ihrer Lösung, die im gleichen Heft der Zeitschrift erschien, fand die Fragestellung weitgehende Verallgemeinerungen. Eine Übersicht bekannter Resultate über Pflasterungen von Inter-

vallen, Sphären und Kugeln mit paarweise kongruenten Teilmengen wird in [Wa1] gegeben. Einige Aussagen zu diesem Thema findet man auch in der Monographie [Wa2]. Neuere Ergebnisse sowie historische Bemerkungen über derartige Zerlegbarkeitseigenschaften von abgeschlossenen beschränkten konvexen Mengen findet man in den Artikeln [He], [Ede1], [E/J/T] und [Ede2]. Dabei betrachtet *M. Edelstein* in seinen Arbeiten nicht mehr nur Teilmengen von euklidischen Räumen, sondern er untersucht Zerlegungsprobleme in Banachräumen. In [Ede2] wird die Fragestellung auch noch dahingehend erweitert, daß die Zerlegung nicht mehr in Teilmengen erfolgen muß, die paarweise bezüglich der Isometriegruppe des Einbettungsraumes kongruent sind. Dieser scharfe Kongruenzbegriff wurde durch die Zulassung einer größeren Transformationsgruppe abgeschwächt. Alle diese Fragestellungen ordnen sich in das folgende allgemeine Konzept ein.

Definition 3.1 *Es sei \mathcal{G} eine Transformationsgruppe auf einer Menge X . Eine Teilmenge $M \subseteq X$ wird m -teilbar bezüglich \mathcal{G} genannt, wenn M eine disjunkte Zerlegung in m Teilmengen gestattet, die paarweise vermöge geeigneter Transformationen aus \mathcal{G} aufeinander abbildbar sind.*

Definition 3.1 folgt im wesentlichen der Notation aus [Wa1]. In [He] wird eine Zerlegung einer Menge M in m paarweise \mathcal{G} -kongruente Teile auch als eine (*disjunkte*) \mathcal{G} -Pflasterung von M bezeichnet. Beide Begriffsbildungen sind offensichtlich äquivalent. Wir wollen hier anmerken, daß m zunächst eine beliebige Kardinalzahl sein kann. In der Literatur spielt insbesondere die \aleph_0 -Teilbarkeit bestimmter Mengen eine nicht unwesentliche Rolle (vgl. [Wa1], [Wa2], [He], [Ede1]). Hier sollen dagegen nur endliche Pflasterungen betrachtet werden, also $m \in \mathbb{N}$.

Die vorzustellenden Resultate wurden durch die Arbeit [He] motiviert. *E. Hertel* zeigt dort einerseits, daß kein nichtleeres beschränktes abgeschlossenes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ bezüglich der Bewegungsgruppe des eindimensionalen euklidischen Raumes m -teilbar ist, $m \geq 2$. Andererseits wird bewiesen, daß keine nichtleere kompakte konvexe Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, bezüglich der Gruppe der euklidischen Isometrien zweiteilbar ist. Im Abschnitt 3.2 wollen wir letztere Aussage verallgemeinern. Wir werden die Problemstellung so formulieren, daß wir Resultate über die Nicht-Halbierbarkeit konvexer Kompakta sowohl in lokalkonvexen topologischen Vektorräumen (vgl. [Ede2]) als auch in der klassischen sphärischen bzw. hyperbolischen Geometrie erhalten können. Dabei wollen wir die Überlegungen aus [Ri6] vorstellen. Dagegen wird der Abschnitt 3.3 der Frage nach der m -Teilbarkeit von Kugeln im euklidischen Raum \mathbb{R}^n bezüglich der Gruppe der Homöomorphismen des \mathbb{R}^n gewidmet sein (vgl. [Ri5]).

3.2 Die Unteilbarkeit konvexer Kompakta

3.2.1 Ein Lemma über konvextreue Homöomorphismen

Wie schon in der Einführung angekündigt wurde, wollen wir in diesem Abschnitt konvexe Mengen nicht nur in linearen Räumen betrachten. Wir nutzen dazu das sehr allgemeine Konzept der *schwachen Konvexität*¹. Ist X eine beliebige Menge, dann nennen wir ein System $\mathcal{K} \subseteq 2^X$ von Teilmengen eine *schwache Konvexität auf X* , wenn der Durchschnitt $\bigcap \mathcal{K}'$ über jedem nichtleeren Teilsystem $\mathcal{K}' \subseteq \mathcal{K}$ wiederum eine Menge aus \mathcal{K} ist. Insbesondere ist natürlich die übliche Konvexität in linearen Räumen eine schwache Konvexität. Weiterhin wird eine Bijektion τ von X auf sich \mathcal{K} -invariant genannt, wenn für jede schwach konvexe Menge $K \in \mathcal{K}$ die Bilder $\tau(K)$ und $\tau^{-1}(K)$ ebenfalls schwach konvex sind. Wir erhalten eine notwendige Bedingung für die Zweiteilbarkeit schwach konvexer Mengen.

Lemma 3.2 *Es seien (X, \mathcal{O}) ein topologischer Raum und \mathcal{K} eine schwache Konvexität auf X , die nur zusammenhängende Teilmengen von X enthält. Besitzt eine nichtleere kompakte schwach konvexe Menge $K \in \mathcal{K}$ eine disjunkte Zerlegung $K = A \cup B$, so daß $\tau(A) = B$ für einen \mathcal{K} -invarianten Homöomorphismus von X auf sich gilt, dann gibt es eine nichtleere kompakte schwach konvexe Teilmenge $\tilde{K} \subseteq K$ mit $\tau(\tilde{K}) = \tilde{K}$.*

Beweis: Wir setzen $K_m = \bigcap_{i=0}^{2m} \tau^i(K)$ für $m \in \mathbb{N}$. Offensichtlich sind die Mengen K_m kompakt und schwach konvex. Durch vollständige Induktion nach m weisen wir nun die Aussagen

$$\begin{aligned} (\alpha_m) \quad & K_m \neq \emptyset \quad \text{und} \\ (\beta_m) \quad & \tau(K_m \cap A) = K_m \cap B \end{aligned}$$

nach. Für $m = 0$ erhalten wir $K_0 = K$, so daß (α_0) und (β_0) offensichtlich erfüllt sind. Zum Beweis von (α_{m+1}) und (β_{m+1}) setzen wir die Gültigkeit von (α_m) und (β_m) voraus. Zunächst erkennen wir, daß

$$K_m \setminus \tau(K_m) \subseteq K_m \setminus \tau(K_m \cap A) = K_m \setminus (K_m \cap B)$$

gilt. Da K_m als disjunkte Vereinigung $K_m = (K_m \cap A) \cup (K_m \cap B)$ dargestellt werden kann, folgt

$$K_m \setminus \tau(K_m) \subseteq K_m \cap A \tag{3.1}$$

und unter Ausnutzung von (β_m) auch

$$\tau(K_m \setminus \tau(K_m)) \subseteq K_m \cap B. \tag{3.2}$$

Die Menge K_{m+1} kann geschrieben werden als

$$K_{m+1} = K_m \cap \tau(K_m) \cap \tau^2(K_m)$$

¹Dieser Begriff ist durch einen Vortrag von *E. Hertel* über die Axiomatik der Konvexität anlässlich der Jahrestagung der DMV 1995 in Ulm motiviert.

$$\begin{aligned}
&= (K_m \setminus (K_m \setminus \tau(K_m))) \setminus (\tau(K_m) \setminus \tau^2(K_m)) \\
&= K_m \setminus ((K_m \setminus \tau(K_m)) \cup (\tau(K_m) \setminus \tau^2(K_m))) \\
&= ((K_m \cap A) \cup (K_m \cap B)) \setminus ((K_m \setminus \tau(K_m)) \cup \tau(K_m \setminus \tau(K_m))) \\
&= ((K_m \cap A) \setminus ((K_m \setminus \tau(K_m)) \cup \tau(K_m \setminus \tau(K_m)))) \cup \\
&\quad \cup ((K_m \cap B) \setminus ((K_m \setminus \tau(K_m)) \cup \tau(K_m \setminus \tau(K_m)))) .
\end{aligned}$$

Wegen der Elementfremdheit von $K_m \cap A$ und $K_m \cap B$ folgt daraus mit Hilfe der Inklusionen (3.1) und (3.2) die Darstellbarkeit von K_{m+1} als disjunkte Vereinigung

$$K_{m+1} = ((K_m \cap A) \setminus (K_m \setminus \tau(K_m))) \cup ((K_m \cap B) \setminus \tau(K_m \setminus \tau(K_m))) . \quad (3.3)$$

Nun erhalten wir die Gleichung (β_{m+1}) gemäß

$$\begin{aligned}
\tau(K_{m+1} \cap A) &= \tau((K_m \cap A) \setminus (K_m \setminus \tau(K_m))) \\
&= (K_m \cap B) \setminus \tau(K_m \setminus \tau(K_m)) \\
&= K_{m+1} \cap B .
\end{aligned}$$

Zum Nachweis von (α_{m+1}) argumentieren wir indirekt. Wir gehen von der Annahme $K_{m+1} = \emptyset$ aus. Damit erhalten wir vermöge (3.3) und (3.1) die Gleichung

$$\begin{aligned}
K_m \cap A &= (K_m \cap A) \setminus ((K_m \cap A) \cap K_{m+1}) \\
&= (K_m \cap A) \setminus ((K_m \cap A) \setminus (K_m \setminus \tau(K_m))) \\
&= K_m \setminus \tau(K_m)
\end{aligned}$$

und daraus wiederum

$$K_m \cap B = K_m \setminus (K_m \cap A) = K_m \setminus (K_m \setminus \tau(K_m)) = K_m \cap \tau(K_m) .$$

Die letzte Identität zeigt uns, daß sowohl die Menge $K_m \cap B$ als auch ihr homöomorphes Bild $K_m \cap A = \tau^{-1}(K_m \cap B)$ abgeschlossen sind. Demnach wäre die zusammenhängende Menge K_m in zwei nichtleere abgeschlossene Teilmengen zerlegbar. Dieser Widerspruch beweist die Gültigkeit von (α_{m+1}) .

Schließlich definieren wir $\tilde{K} = \bigcap_{i=-\infty}^{\infty} \tau^i(K)$. Die Menge \tilde{K} ist als Durchschnitt der absteigenden Folge nichtleerer kompakter schwach konvexer Mengen $\tau^{-m}(K_m)$, $m \geq 0$, ebenfalls nichtleer, kompakt und schwach konvex. Offensichtlich gilt $\tilde{K} \subseteq K$ und $\tau(\tilde{K}) = \tilde{K}$. Damit ist Lemma 3.2 vollständig bewiesen. \square

Im Anschluß soll Lemma 3.2 zum Nachweis von negativen Aussagen über die Halbierbarkeit konvexer Mengen benutzt werden. Wir werden dabei zeigen, daß die im Lemma angegebene notwendige Bedingung unter bestimmten Voraussetzungen nicht erfüllt sein kann. Um zu verdeutlichen, daß die Bedingung nicht in jedem Fall unerfüllbar ist, wollen wir an dieser Stelle zunächst ein positives Beispiel anführen: Wir betrachten auf der n -dimensionalen Sphäre S^n das Mengensystem $\mathcal{K} = \mathcal{K}_{S^n} \cup \{S^n\}$. Dabei bestehe \mathcal{K}_{S^n} aus allen Teilmengen $K \subseteq S^n$, die einerseits

kein Paar diametraler Punkte enthalten und andererseits mit je zwei Punkten auch den sie verbindenden kürzeren Großkreisbogen als Teilmenge umfassen. Derartige Mengen K werden als *sphärisch konvex* bezeichnet (vgl. [Bö/He], S. 27). Man sieht leicht, daß \mathcal{K} eine schwache Konvexität auf S^n ist, die nur aus zusammenhängenden Mengen besteht. Die Abbildung $\tau : S^n \rightarrow S^n$ ordne jedem Punkt aus S^n seinen Diametralpunkt zu. Dann ist τ ein \mathcal{K} -invarianter Homöomorphismus. Die kompakte schwach konvexe Menge S^n besitzt offenbar eine Zerlegung $S^n = A \cup B$ mit $\tau(A) = B$. Also ist S^n halbbierbar bezüglich der Gruppe der Isometrien der Sphäre. Lemma 3.2 besagt, daß es eine nichtleere kompakte schwach konvexe Teilmenge $\tilde{K} \subseteq S^n$ mit $\tau(\tilde{K}) = \tilde{K}$ gibt. Dies gilt offenbar für $\tilde{K} = S^n$. Eine weitere Menge mit diesen Eigenschaften existiert jedoch nicht, da jede solche Menge aufgrund der Struktur von τ zwei diametrale Punkte enthalten muß. Die einzige derartige Menge aus \mathcal{K} ist aber S^n .

3.2.2 Unteilbarkeitsaussagen in verschiedenen Räumen

Als wichtigste Folgerung aus Lemma 3.2 erhalten wir eine Aussage über die Nicht-Halbbierbarkeit konvexer Kompakta in lokalkonvexen topologischen Vektorräumen X bezüglich der *Gruppe der affinen Homöomorphismen* von X auf sich. Dieser Satz wurde bereits von *M. Edelstein* mit überwiegend anderen Methoden bewiesen (vgl. [Ede2]).

Satz 3.3 *Keine nichtleere kompakte konvexe Teilmenge K eines lokalkonvexen topologischen Vektorraumes X ist zweiteilbar bezüglich der Gruppe der affinen Homöomorphismen von X auf sich.*

Beweis: Wäre K halbbierbar, dann existierte eine Zerlegung $K = A \cup B$, wobei $\tau(A) = B$ mit einem geeigneten affinen Homöomorphismus τ gelten würde. Wir können Lemma 3.2 anwenden. Demnach gäbe es eine nichtleere kompakte konvexe Teilmenge $\tilde{K} \subseteq K$ mit $\tau(\tilde{K}) = \tilde{K}$. Nach dem Fixpunktsatz von *J. Schauder* und *A. Tychonoff* (vgl. [Du/Sch], S. 456) besäße τ einen Fixpunkt $x \in \tilde{K} \subseteq K$. Dies würde aber der Disjunktheit der untereinander komplementären Teilmengen A und $B = \tau(A)$ von K widersprechen. Somit ist K nicht zweiteilbar. \square

Satz 3.3 verallgemeinert die Aussage aus [He] über die Nicht-Halbbierbarkeit konvexer Kompakta im \mathbb{R}^n bezüglich der euklidischen Isometriegruppe sehr weitgehend, denn das Problem wird nicht nur in einer größeren Klasse von Räumen, sondern auch bezüglich einer größeren Transformationsgruppe gelöst. Die Beschränkung auf konvexe Mengen in linearen Räumen bleibt zunächst bestehen. Lemma 3.2 ermöglicht uns jedoch auch den Übergang zur hyperbolischen und zur sphärischen Geometrie.

Es bezeichne H^n den n -dimensionalen hyperbolischen Raum, $n \geq 1$. Eine Teilmenge $K \subseteq H^n$ wird *hyperbolisch konvex* genannt, wenn sie mit je zwei Punkten auch ihre (hyperbolische) Verbindungsstrecke als Teilmenge enthält (vgl. [Bö/He],

S. 31). Offensichtlich ist das System \mathcal{K}_{H^n} aller hyperbolisch konvexen Mengen eine schwache Konvexität auf H^n , die überdies nur zusammenhängende Mengen enthält.

Satz 3.4 *Keine nichtleere kompakte hyperbolisch konvexe Teilmenge K des Raumes H^n ist zweiteilbar bezüglich der Gruppe der Isometrien von H^n .*

Beweis: Wir betrachten das Kleinsche Modell von H^n . Danach identifizieren wir H^n mit den Punkten einer offenen Kugel B im euklidischen Raum \mathbb{R}^n . Hyperbolische Geraden und Strecken sind die Sehnen bzw. Sehnenabschnitte der Kugel. Insbesondere sind deshalb die hyperbolisch konvexen Mengen aus \mathcal{K}_{H^n} gerade die konvexen Teilmengen von B bezüglich der üblichen Konvexität des linearen Raumes \mathbb{R}^n .

Wir nehmen an, K gestatte eine Zerlegung $K = A \cup B$, wobei $\tau(A) = B$ für eine Isometrie τ von H^n gelte. Nach Lemma 3.2 gibt es eine nichtleere kompakte hyperbolisch konvexe Menge $\tilde{K} \subseteq K$ mit $\tau(\tilde{K}) = \tilde{K}$. Da H^n aber die übliche Topologie der offenen Kugel B trägt, ist die Einschränkung $\tau|_{\tilde{K}}$ ein Homöomorphismus der kompakten konvexen Menge $\tilde{K} \subseteq \mathbb{R}^n$ auf sich. Für den linearen Raum \mathbb{R}^n können wir wieder den Fixpunktsatz von *J. Schauder* und *A. Tychonoff* anwenden. Danach besitzt τ einen Fixpunkt $x \in \tilde{K} \subseteq K$ im Widerspruch zur Disjunktheit der Mengen A und B . Somit ist K bezüglich der Isometriegruppe von H^n nicht halbierbar. \square

Mit S^n bezeichnen wir die n -dimensionale Sphäre, $n \geq 1$. Sphärische Geraden sind die Großkreise auf S^n . Für zwei nicht diametrale Punkte aus S^n ist ihre sphärische Verbindungsstrecke durch den kürzeren der beiden sie verbindenden Großkreisbögen gegeben. Dagegen existiert zu zwei diametralen Punkten keine eindeutig bestimmte kürzeste Verbindung. Deshalb ist der folgende Konvexitätsbegriff auf S^n sinnvoll (vgl. [Bö/He], S. 27): Eine Menge $K \subseteq S^n$ wird *sphärisch konvex* genannt, wenn K keine zwei diametralen Punkte enthält, und wenn mit je zwei Punkten aus K auch die gesamte sie verbindende sphärische Strecke Teilmenge von K ist. Das System \mathcal{K}_{S^n} aller sphärisch konvexen Mengen ist offenbar eine schwache Konvexität auf S^n . Im Gegensatz zu den bisher betrachteten Beispielen schwacher Konvexitäten ist hier der Grundraum S^n keine schwach konvexe Menge. Darin unterscheidet sich \mathcal{K}_{S^n} gerade von dem im Anschluß an Lemma 3.2 betrachteten System $\mathcal{K} \subseteq 2^{S^n}$.

Satz 3.5 *Keine nichtleere kompakte sphärisch konvexe Teilmenge K des Raumes S^n ist zweiteilbar bezüglich der Gruppe der Isometrien von S^n .*

Beweis: Wir argumentieren wiederum indirekt und nehmen die Existenz einer Zerlegung $K = A \cup B$ an, wobei $\tau(A) = B$ mit einer geeigneten Isometrie τ von S^n gilt. Lemma 3.2 zeigt erneut die Existenz einer nichtleeren kompakten sphärisch konvexen Teilmenge $\tilde{K} \subseteq K$ mit $\tau(\tilde{K}) = \tilde{K}$.

Nach [Bö/He], S. 27, liegt \tilde{K} in einer offenen Halbsphäre $(S^n)^+$ von S^n . Wir können S^n als den Rand der Einheitskugel $B(0, 1)$ des euklidischen Raumes \mathbb{R}^{n+1}

auffassen, wobei o.B.d.A. $(S^n)^+ = \{(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+1}) \in S^n : \xi_{n+1} > 0\}$ gelte. Wir betrachten den Homöomorphismus π , der die offene Halbsphäre $(S^n)^+$ durch eine Zentralprojektion vom Koordinatenursprung aus auf die Hyperebene $\varepsilon = \{(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \xi_{n+1} = 1\}$ abbildet. Da π Großkreisbögen aus $(S^n)^+$ Geraden aus ε zuordnet, sind die Bilder von sphärisch konvexen Teilmengen der Halbsphäre $(S^n)^+$ konvexe Mengen in der Hyperebene ε . (Eine analoge Aussage gilt auch für die inverse Abbildung π^{-1} .) Insbesondere ist $\pi(\tilde{K})$ eine nichtleere kompakte konvexe Teilmenge von ε .

Nach dem Satz von *J. Schauder* und *A. Tychonoff* besitzt der Homöomorphismus $\pi|_{\tilde{K}} \circ \tau|_{\tilde{K}} \circ \pi^{-1}|_{\pi(\tilde{K})}$ von $\pi(\tilde{K})$ auf sich einen Fixpunkt $x \in \pi(\tilde{K})$. Folglich gilt $\tau(y) = y$ für den Punkt $y = \pi^{-1}(x) \in \tilde{K} \subseteq K$. Dieser Widerspruch zur Disjunktheit der Mengen A und B zeigt die Nicht-Halbierbarkeit von K . \square

Damit ist die ursprüngliche Aussage über die Nicht-Zweiteilbarkeit konvexer Kompakta des euklidischen Raumes bezüglich der euklidischen Bewegungsgruppe auch für die klassischen nichteuklidischen Geometrien bewiesen.

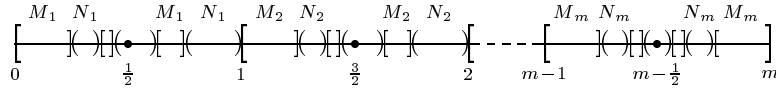
Dennoch bleiben viele Fragen offen. Kann in den Sätzen 3.3–3.5 die Konvexität der Mengen K abgeschwächt werden? In den obigen Argumentationen spielten vor allem topologische Überlegungen eine Rolle. Es stellt sich die Frage, ob die Sätze gültig bleiben, wenn die konvexen Mengen K durch dazu homöomorphe Mengen (in den entsprechenden Räumen) ersetzt werden.

Ein weites Feld bilden die Fragen nach der m -Teilbarkeit konvexer Kompakta. Hier gibt es das in der Einführung erwähnte Resultat über die Nicht- m -Teilbarkeit von Intervallen im eindimensionalen Fall. Aber schon das Problem, ob eine Kreisscheibe in der euklidischen Ebene bezüglich der euklidischen Isometrien eine Dreiteilung erlaubt, ist ungelöst!

3.3 Topologische Pflasterungen von Kugeln

3.3.1 Pflasterungen abgeschlossener Kugeln

Wir haben festgestellt, daß konvexe Kompakta im euklidischen Raum \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, nicht bezüglich der Gruppe der affinen Homöomorphismen halbierbar sind. Da wir zum Beweis dieses Sachverhaltes topologische Eigenschaften konvexer Kompakta wesentlich ausnutzen konnten, wollen wir nun untersuchen, ob eine entsprechende Aussage gilt, wenn wir die Gruppe der affinen Homöomorphismen durch die Gruppe \mathcal{T}^n aller Homöomorphismen des \mathbb{R}^n ersetzen. Zunächst fragen wir nach der m -Teilbarkeit abgeschlossener Kugeln $B(x, r) \subseteq \mathbb{R}^n$, $r > 0$, bezüglich \mathcal{T}^n . Natürlich gelten diese Aussagen entsprechend auch für \mathcal{T}^n -Bilder der Kugeln, also insbesondere für konvexe Kompakta mit inneren Punkten. Unser Hauptanliegen ist der Beweis des folgenden Satzes.

Abbildung 3.1: Aufteilung von $[0, m]$

Satz 3.6 *Es seien $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ und $m \in \{2, 3, 4, \dots\}$. Eine abgeschlossene Kugel im Raum \mathbb{R}^n ist genau dann m -teilbar bezüglich der Gruppe \mathcal{T}^n , wenn $(n, m) \neq (1, 2)$ gilt.*

Zum Nachweis von Satz 3.6 verifizieren wir vier Teilaussagen. Den ersten Hilfssatz werden wir wiederum unter Ausnutzung von Lemma 3.2 und des Fixpunktsatzes von *J. Schauder* und *A. Tychonoff* beweisen. Ein elementarer Zugang ohne Verweis auf den abstrakten Fixpunktsatz ist in [Ri5] zu finden.

Hilfssatz 3.7 *Keine abgeschlossene Kugel im Raum \mathbb{R}^1 ist zweiteilbar bezüglich der Gruppe \mathcal{T}^1 .*

Beweis: Wir nehmen an, die abgeschlossene Kugel $B(0, 1)$ besitze eine Zerlegung $B(0, 1) = A \cup B$, wobei $\tau(A) = B$ für eine Transformation $\tau \in \mathcal{T}^1$ gelte. Offenbar ist $B(0, 1)$ ein konvexes Kompaktum im Raum \mathbb{R}^1 . Weiterhin bildet der Homöomorphismus τ Intervalle auf Intervalle ab, so daß τ invariant bezüglich der Konvexität auf \mathbb{R}^1 ist. Nach Lemma 3.2 gibt es eine nichtleere kompakte konvexe Teilmenge $\tilde{K} \subseteq B(0, 1)$ mit $\tau(\tilde{K}) = \tilde{K}$. Der Satz von *J. Schauder* und *A. Tychonoff* liefert uns die Existenz eines Fixpunktes $x \in \tilde{K} \subseteq B(0, 1)$ von τ im Widerspruch zur Disjunktheit von A und B . Damit ist Hilfssatz 3.7 bewiesen. \square

Hilfssatz 3.8 *Jede abgeschlossene Kugel im Raum \mathbb{R}^1 ist m -teilbar bezüglich der Gruppe \mathcal{T}^1 für alle $m \in \{3, 4, 5, \dots\}$.*

Beweis: Wir betrachten die Kugel $B(\frac{m}{2}, \frac{m}{2}) = [0, m]$, die die Zerlegung in die Intervalle $[0, 1)$, $[1, 2)$, \dots , $[m-2, m-1)$ und $[m-1, m]$ erlaubt (vgl. Abbildung 3.1). Die halboffenen Intervalle $[j-1, j)$, $1 \leq j \leq m-1$, zerlegen wir weiter gemäß

$$[j-1, j) = M_j \cup N_j$$

mit

$$M_j = \{j - \tfrac{1}{2}\} \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} (\{j - \tfrac{1}{2}\} + (-1)^k \cdot [2^{-k-1}, 2^{-k}]) ,$$

$$N_j = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\{j - \tfrac{1}{2}\} + (-1)^{k+1} \cdot (2^{-k-1}, 2^{-k})) .$$

Das verbleibende abgeschlossene Intervall $[m-1, m]$ wird ebenfalls als eine disjunkte Vereinigung

$$[m-1, m] = M_m \cup N_m$$

dargestellt mit

$$M_m = \left\{ m - \frac{1}{2} \right\} \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\left\{ m - \frac{1}{2} \right\} + [-2^{-2k+1}, -2^{-2k}] \cup [2^{-2k}, 2^{-2k+1}] \right),$$

$$N_m = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\left\{ m - \frac{1}{2} \right\} + (-2^{-2k}, -2^{-2k-1}) \cup (2^{-2k-1}, 2^{-2k}) \right).$$

Wir betrachten nun die Zerlegung

$$[0, m] = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$$

von $[0, m]$ mit

$$A_j = \begin{cases} M_j \cup N_{j+1} & \text{für } 1 \leq j \leq m-1, \\ M_m \cup N_1 & \text{für } j = m. \end{cases}$$

Alle Mengen A_1, A_2, \dots, A_{m-1} und die gespiegelte Menge $-A_m$ haben die folgende topologische Struktur:

$$A = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \hat{C}_i \right) \cup \{c\} \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \check{C}_i \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \hat{O}_i \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \check{O}_i \right).$$

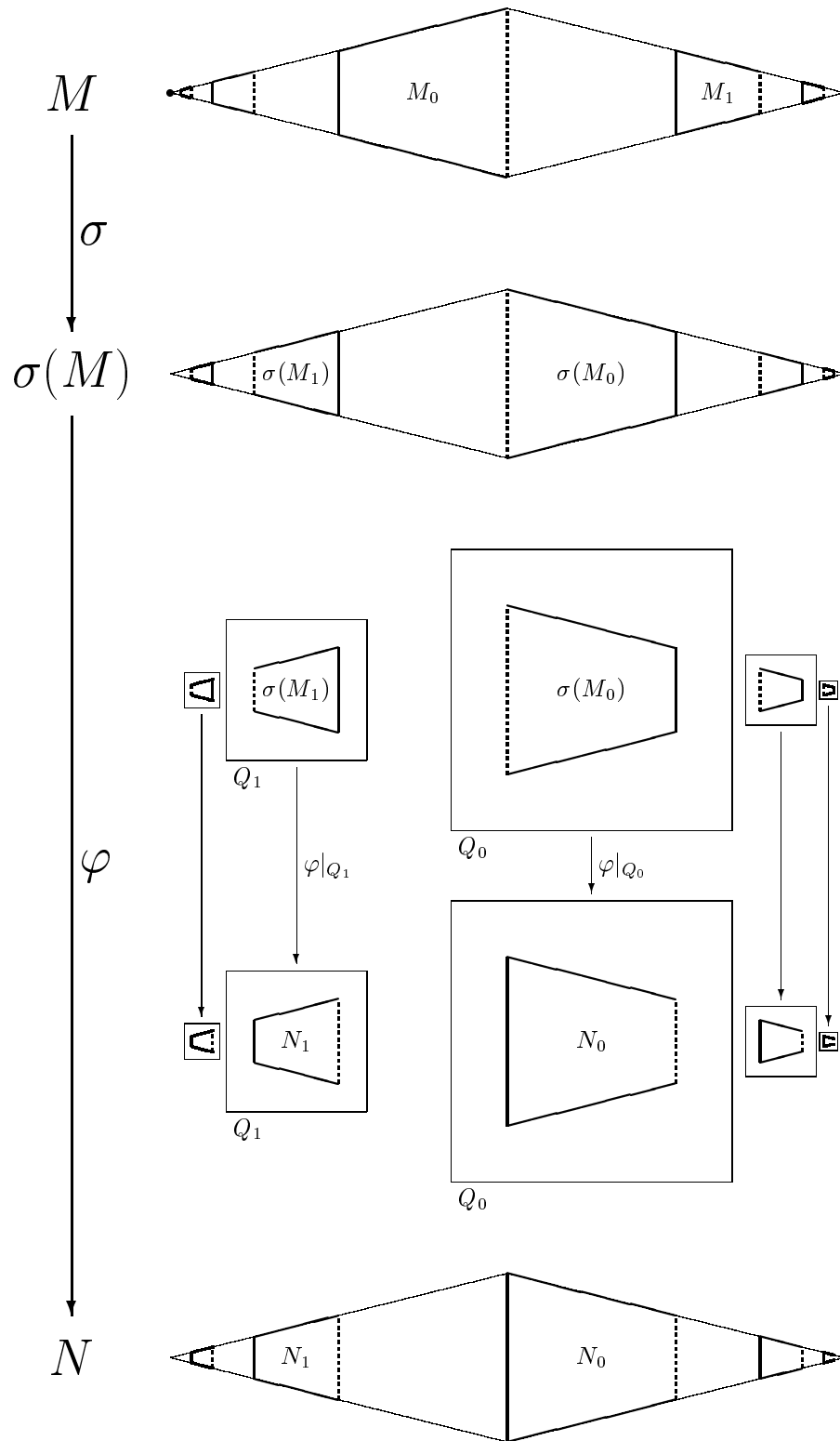
Dabei bilden die Mengen \hat{C}_i eine Folge disjunkter abgeschlossener beschränkter Intervalle positiver Länge, die aufsteigend gegen den Punkt $c \in A$ streben. $(\check{C}_i)_{i=1}^{\infty}$ ist eine Folge disjunkter abgeschlossener beschränkter Intervalle positiver Länge, die sich von oben kommend beim Punkt c häufen. In analoger Weise streben die disjunkten offenen beschränkten Intervalle \hat{O}_i positiver Länge von unten gegen einen Punkt $o \notin A$. Schließlich besteht die Folge $(\check{O}_i)_{i=1}^{\infty}$ ebenfalls aus disjunkten offenen Intervallen positiver Länge, die sich jedoch von oben kommend bei o häufen. Alle Intervalle \hat{C}_i , \check{C}_i , \hat{O}_i und \check{O}_i werden wiederum paarweise durch Intervalle positiver Länge voneinander separiert. Insbesondere sind auch die abgeschlossene Menge $\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \hat{C}_i \right) \cup \{c\} \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \check{C}_i \right)$ und die offene Menge $\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \hat{O}_i \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \check{O}_i \right)$ auf diese Art voneinander getrennt.

Für je zwei solche Mengen A und A' gibt es einen streng wachsenden Homöomorphismus $\tau \in \mathcal{T}^1$ mit $\tau(A) = A'$. Man kann τ als eine stückweise affine Funktion definieren, die \hat{C}_1 auf \hat{C}'_1 , \hat{C}_2 auf \hat{C}'_2 , \dots , c auf c' , \dots , \check{C}_2 auf \check{C}'_2 , \check{C}_1 auf \check{C}'_1 , \hat{O}_1 auf \hat{O}'_1 , \hat{O}_2 auf \hat{O}'_2 , \dots , o auf o' , \dots , \check{O}_2 auf \check{O}'_2 und \check{O}_1 auf \check{O}'_1 abbildet.

Dies zeigt, daß die Mengen A_i , $1 \leq i \leq m$, paarweise vermöge geeigneter Transformationen aus \mathcal{T}^1 auseinander hervorgehen. Also ist die eindimensionale Kugel $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = [0, m]$ m -teilbar bezüglich \mathcal{T}^1 . \square

Wir möchten hier darauf hinweisen, daß der obige Beweis nicht für den Fall $m = 2$ anwendbar ist, da dann die Mengen M_2 und N_1 nicht durch ein Intervall separiert sind. Dies verändert die topologische Struktur von $A_2 = M_2 \cup N_1$.

Hilfssatz 3.9 *Jede abgeschlossene Kugel im Raum \mathbb{R}^2 ist zweiteilbar bezüglich der Gruppe \mathcal{T}^2 .*


 Abbildung 3.2: Zweiteilung des Rhombus R

Beweis: Anstelle abgeschlossener Kugeln betrachten wir o.B.d.A. den Rhombus $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq \frac{1}{4}(1 - |x|)\}$, der ein \mathcal{T}^2 -Bild einer Kugel ist (vgl. Abbildung 3.2). R besitzt eine Zerlegung $R = M \cup N$ mit

$$M = \{(-1, 0)\} \cup \bigcup_{k=0}^{\infty} M_k \quad \text{und} \quad N = \{(1, 0)\} \cup \bigcup_{k=0}^{\infty} N_k$$

sowie

$$M_k = \begin{cases} \{(x, y) \in R : x \in [-1 + 2^{-(k+1)}, -1 + 2^{-k}]\} & \text{für gerades } k, \\ \{(x, y) \in R : x \in [1 - 2^{-k}, 1 - 2^{-(k+1)}]\} & \text{für ungerades } k \end{cases}$$

und

$$N_k = \begin{cases} \{(x, y) \in R : x \in [1 - 2^{-k}, 1 - 2^{-(k+1)}]\} & \text{für gerades } k, \\ \{(x, y) \in R : x \in [-1 + 2^{-(k+1)}, -1 + 2^{-k}]\} & \text{für ungerades } k. \end{cases}$$

Wir definieren einen Homöomorphismus $\tau \in \mathcal{T}^2$ gemäß $\tau = \varphi\sigma$, wobei σ die Spiegelung an der vertikalen Achse ist, also $\sigma(x, y) = (-x, y)$. Die Abbildung φ hat eine kompliziertere Struktur: Jede der Mengen $\sigma(M_k)$, die ja von der Form $\sigma(M_k) = \{(x, y) \in R : x \in (a_k, b_k]\}$ sind, liegt im Inneren eines zugehörigen Quadrates $Q_k = \left[a_k - \frac{b_k - a_k}{3}, b_k + \frac{b_k - a_k}{3}\right] \times \left[-\frac{5(b_k - a_k)}{6}, \frac{5(b_k - a_k)}{6}\right]$. Die Quadrate Q_k sind paarweise disjunkt. Die Einschränkung $\varphi|_{Q_k}$ von φ auf Q_k sei ein Homöomorphismus von Q_k auf sich, der den Rand $\text{bd}(Q_k)$ punktweise fest lasse und die Menge $\sigma(M_k)$ auf N_k abbilde. Weiterhin soll φ auf den verbleibenden Punkten $(x, y) \notin \bigcup_{k=0}^{\infty} Q_k$ als identische Abbildung wirken. Man sieht leicht, daß die stückweisen Definitionen von φ einen Homöomorphismus $\varphi \in \mathcal{T}^2$ erklären.

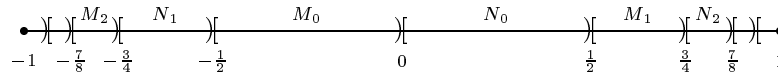
Es gilt somit $\tau = \varphi\sigma \in \mathcal{T}^2$, wobei

$$\begin{aligned} \tau(M) &= \varphi\sigma\left(\{(-1, 0)\} \cup \bigcup_{k=0}^{\infty} M_k\right) \\ &= \varphi(\sigma(\{(-1, 0)\})) \cup \bigcup_{k=0}^{\infty} \varphi(\sigma(M_k)) \\ &= \{(1, 0)\} \cup \bigcup_{k=0}^{\infty} N_k = N. \end{aligned}$$

Damit ist der Rhombus R zweiteilbar bezüglich \mathcal{T}^2 . \square

Hilfssatz 3.10 *Es seien $n \in \{2, 3, 4, \dots\}$ und $m \in \{2, 3, 4, \dots\}$ so gewählt, daß eine abgeschlossene Kugel im Raum \mathbb{R}^{n-1} m -teilbar bezüglich \mathcal{T}^{n-1} ist. Dann ist auch jede abgeschlossene Kugel im Raum \mathbb{R}^n m -teilbar bezüglich \mathcal{T}^n .*

Beweis: Es sei $B^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ eine bezüglich \mathcal{T}^{n-1} m -teilbare abgeschlossene Kugel. Es gibt also eine Zerlegung $B^{n-1} = A_1^{n-1} \cup A_2^{n-1} \cup \dots \cup A_m^{n-1}$ und Abbildungen $\tau_i^{(n-1)} \in \mathcal{T}^{n-1}$, so daß $\tau_i^{(n-1)}(A_1^{n-1}) = A_i^{n-1}$ für $1 \leq i \leq m$ gilt. Stellvertretend für die abgeschlossenen Kugeln im Raum \mathbb{R}^n betrachten wir den

Abbildung 3.3: Zerlegung von $[-1, 1]$

Zylinder $B^n = B^{n-1} \times [0, 1]$. Offensichtlich kann B^n zerlegt werden vermöge $B^n = (A_1^{n-1} \times [0, 1]) \cup (A_2^{n-1} \times [0, 1]) \cup \dots \cup (A_m^{n-1} \times [0, 1])$. Bezeichnet ι die Identität auf \mathbb{R} , dann liegen die Abbildungen $\tau_i^{(n)} = \tau_i^{(n-1)} \times \iota$ offensichtlich in \mathcal{T}^n , und es gilt $\tau_i^{(n)}(A_1^{n-1} \times [0, 1]) = A_i^{n-1} \times [0, 1]$ für $1 \leq i \leq m$. Dies belegt die m -Teilbarkeit von B^n bezüglich \mathcal{T}^n . \square

Nach diesen Vorbereitungen ist der **Beweis von Satz 3.6** nun trivial: Hilfssatz 3.7 zeigt die Nicht-Zweiteilbarkeit abgeschlossener Kugeln des \mathbb{R}^1 bezüglich \mathcal{T}^1 . Durch Induktion nach n erhält man einerseits aus den Hilfssätzen 3.9 und 3.10 die Zweiseitbarkeit der abgeschlossenen Kugeln in den Räumen \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, bezüglich \mathcal{T}^n und andererseits unter Ausnutzung von Hilfssatz 3.8 und Hilfssatz 3.10 die m -Teilbarkeit im \mathbb{R}^n bezüglich \mathcal{T}^n für $m \geq 3$ und $n \geq 1$. \square

Man kann die durch Satz 3.6 gelöste Problemstellung noch abschwächen, indem man fragt, ob abgeschlossene Kugeln im n -dimensionalen Raum in m paarweise homöomorphe topologische Teilräume (bezüglich der Spurtopologie des \mathbb{R}^n) zerlegbar sind. Diese Frage ist schwächer, da natürlich jede \mathcal{T}^n -Pflasterung aus m Teilen eine solche Zerlegung darstellt. Andererseits muß aber ein Homöomorphismus zwischen zwei topologischen Teilräumen des \mathbb{R}^n nicht zu einer Abbildung aus \mathcal{T}^n fortsetzbar sein. Wir erhalten das folgende Resultat.

Satz 3.11 *Es seien $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ und $m \in \{2, 3, 4, \dots\}$. Dann besitzt jede abgeschlossene Kugel im Raum \mathbb{R}^n eine Zerlegung in m paarweise homöomorphe topologische Teilräume.*

Beweis: Nach den obigen Überlegungen genügt die Betrachtung des Falles $n = 1$ und $m = 2$. Wir wollen zeigen, daß das abgeschlossene Intervall $[-1, 1] \subseteq \mathbb{R}^1$ als disjunkte Vereinigung $[-1, 1] = M \cup N$ zweier homöomorpher topologischer Teilräume darstellbar ist (vgl. Abbildung 3.3). Dazu definieren wir

$$M = \{-1\} \cup \bigcup_{k=0}^{\infty} M_k \quad \text{mit} \quad M_k = \begin{cases} [-1 + 2^{-(k+1)}, -1 + 2^{-k}) & \text{für gerades } k, \\ [1 - 2^{-k}, 1 - 2^{-(k+1)}) & \text{für ungerades } k \end{cases}$$

und

$$N = \{1\} \cup \bigcup_{k=0}^{\infty} N_k \quad \text{mit} \quad N_k = \begin{cases} [1 - 2^{-k}, 1 - 2^{-(k+1)}) & \text{für gerades } k, \\ [-1 + 2^{-(k+1)}, -1 + 2^{-k}) & \text{für ungerades } k. \end{cases}$$

Einen Homöomorphismus φ von M auf N erhalten wir folgendermaßen: Die Einschränkungen $\varphi|_{M_k}$ von φ auf die Intervalle M_k , $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$, seien Verschiebungen von M_k auf N_k . Außerdem sei $\varphi(-1) = 1$. Die Stetigkeit von φ in Punkten

aus $M \setminus \{-1\}$ ist trivial, da sich φ dort lokal wie eine Verschiebung des \mathbb{R}^1 verhält. Aufgrund des Häufungsverhaltens der Intervalle M_k bzw. N_k in den Randpunkten -1 und 1 ist auch die Stetigkeit von φ im Punkt -1 gegeben. Die inverse Abbildung ist aus analogen Gründen ebenfalls stetig. Deshalb sind die topologischen Räume M und N homöomorph. \square

3.3.2 Pflasterungen nicht abgeschlossener Kugeln

Im vorigen Abschnitt wurde die Frage nach der m -Teilbarkeit abgeschlossener Kugeln im euklidischen Raum \mathbb{R}^n bezüglich der Gruppe \mathcal{T}^n geklärt. Damit wurde dieses Problem offensichtlich auch für abgeschlossene beschränkte konvexe Teilmengen $K \subseteq \mathbb{R}^n$ mit inneren Punkten gelöst. Wir wollen nun von der Forderung nach Abgeschlossenheit der Mengen K absehen. Derartige Mengen sind offenbar \mathcal{T}^n -Bilder von sogenannten allgemeinen Kugeln. Unter einer *allgemeinen Kugel mit Mittelpunkt $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und Radius $r > 0$* verstehen wir eine Punktmenge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ mit

$$\text{int}(B(x_0, r)) \subseteq B \subseteq B(x_0, r) .$$

Eine nicht abgeschlossene Kugel entsteht also aus einer abgeschlossenen Kugel durch Entfernung wenigstens eines ihrer Randpunkte. Der „kleine topologische Unterschied“ zwischen abgeschlossenen und nicht abgeschlossenen Kugeln ermöglicht für nicht abgeschlossene Kugeln $B \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, im Gegensatz zu Satz 3.6 die m -Teilbarkeit bezüglich \mathcal{T}^n für alle natürlichen Zahlen $m \geq 2$, also insbesondere auch im Fall $(n, m) = (1, 2)$. Wir werden sehen, daß dabei anstelle der Transformationen aus \mathcal{T}^n sogar nur Elemente der Hauptgruppe \mathcal{H}^n aller Ähnlichkeitsabbildungen des \mathbb{R}^n benötigt werden (vgl. Folgerung 3.13).

Zur Vorbereitung beweisen wir die folgende noch allgemeinere Aussage. Dabei nennen wir eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ *sternförmig bezüglich des Punktes $x_0 \in \mathbb{R}^n$* , falls der Schnitt von $M \cup \{x_0\}$ mit jeder durch x_0 verlaufenden Geraden g eine konvexe Teilmenge von g ist. So ist beispielsweise jede konvexe Menge M bezüglich jedes ihrer Punkte $x_0 \in M$ sternförmig. Aber andererseits hat auch jede punktierte Kugel $B^p(x_0, r)$ bezüglich ihres Mittelpunktes x_0 diese Eigenschaft.

Hilfssatz 3.12 *Es seien $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine bezüglich eines Punktes $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus M$ sternförmige Menge, $m \geq 2$ eine natürliche Zahl und $\delta \in \mathcal{H}^n$ eine Dilatation mit Zentrum x_0 und einem Streckungsfaktor $c > 1$. Dann gibt es eine Zerlegung*

$$M = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_m$$

von M , so daß

$$M_i = \delta^{i-1}(M_1)$$

für $i = 1, 2, \dots, m$ gilt.

Beweis: Offensichtlich genügt es, die Behauptung für alle Schnitte $M^{S^+} = M \cap S^+$ mit in x_0 beginnenden offenen Strahlen S^+ zu verifizieren, da δ jeden dieser Strahlen auf sich abbildet, und M die disjunkte Vereinigung aller derartigen Schnitte ist.

O.B.d.A. können wir von der Situation $M^{S^+} \subseteq \mathbb{R}^1$, $x_0 = 0$ und $S^+ = (0, \infty)$ ausgehen. Dann ist wegen der Sternförmigkeit von M der Schnitt M^{S^+} ein Intervall der Form $M^{S^+} = \emptyset$, $M^{S^+} = (0, a)$, $M^{S^+} = (0, a]$ oder $M^{S^+} = (0, \infty)$. Wir betrachten die Zerlegung

$$M^{S^+} = M_1^{S^+} \cup M_2^{S^+} \cup \dots \cup M_m^{S^+}$$

mit

$$M_i^{S^+} = \begin{cases} \emptyset & \text{für } M^{S^+} = \emptyset, \\ \bigcup_{k=-\infty}^{-1} [a \cdot c^{mk+i-1}, a \cdot c^{mk+i}) & \text{für } M^{S^+} = (0, a), \\ \bigcup_{k=-\infty}^{-1} (a \cdot c^{mk+i-1}, a \cdot c^{mk+i}] & \text{für } M^{S^+} = (0, a], \\ \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} (c^{mk+i-1}, c^{mk+i}] & \text{für } M^{S^+} = (0, \infty). \end{cases}$$

Man sieht leicht, daß

$$M_i^{S^+} = c^{i-1} \cdot M_1^{S^+} = \delta^{i-1} (M_1^{S^+})$$

für $i = 1, 2, \dots, m$ erfüllt ist. Damit ist Hilfssatz 3.12 bewiesen. \square

Die in Hilfssatz 3.12 betrachteten Mengen sind also m -teilbar bezüglich \mathcal{H}^n für $m \geq 2$. Insbesondere erfüllt jede nicht abgeschlossene beschränkte strikt konvexe Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ die Voraussetzung des Hilfssatzes bezüglich jedes Randpunktes $x_0 \in \text{bd}(K) \setminus K$, der nicht zu K gehört. (Eine Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *strikt konvex*, wenn für je zwei Punkte $x_1, x_2 \in K$ die offene Verbindungsstrecke von x_1 und x_2 Teilmenge von $\text{int}(K)$ ist.)

Folgerung 3.13 *Jede nicht abgeschlossene beschränkte strikt konvexe Menge im Raum \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, ist m -teilbar bezüglich der Hauptgruppe \mathcal{H}^n für alle natürlichen Zahlen $m \geq 2$. \square*

Hilfssatz 3.12 ist dagegen i.a. nicht mehr anwendbar, wenn man anstelle der strikten Konvexität nur die Konvexität fordert. Betrachtet man beispielsweise drei nicht kollineare Punkte x_1, x_2, x_3 in der Ebene \mathbb{R}^2 , dann ist die Menge

$$K = \text{int}(\text{conv}(\{x_1, x_2, x_3\})) \cup \text{conv}(\{x_2, x_3\})$$

zwar nicht abgeschlossen, beschränkt und konvex, aber K ist bezüglich keines Punktes $x_0 \in \mathbb{R}^2 \setminus K$ sternförmig. Die Idee für dieses Beispiel stammt von E. Hertel.

Natürlich ist die Folgerung speziell für die nicht abgeschlossenen Kugeln anwendbar. Für die Frage nach der Teilbarkeit bezüglich \mathcal{T}^n erhalten wir insbesondere:

Satz 3.14 *Jede nicht abgeschlossene Kugel im Raum \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, ist m -teilbar bezüglich \mathcal{T}^n für alle $m \in \{2, 3, 4, \dots\}$. \square*

Mit den Sätzen 3.6 und 3.14 ist die Frage nach der m -Teilbarkeit von beschränkten konvexen Teilmengen $K \subseteq \mathbb{R}^n$ mit inneren Punkten bezüglich der Gruppe \mathcal{T}^n vollständig diskutiert.

Wir wollen die Betrachtungen dieses Kapitels mit einer Bemerkung zur Optimalität der Struktur der Zerlegungen von abgeschlossenen und von offenen Kugeln im Raum \mathbb{R}^1 , die bei den Beweisen der Hilfssätze 3.8 und 3.12 eine Rolle spielen, abschließen. Die eindimensionalen Kugeln werden dort in m Teilmengen zerlegt, die paarweise vermöge geeigneter Transformationen aus \mathcal{T}^1 aufeinander abbildbar sind. Dabei besitzen die Teilmengen jeweils abzählbar unendlich viele Zusammenhangskomponenten. Die folgende Aussage belegt, daß eine einfachere Struktur der Mengen nicht zu erreichen ist.

Satz 3.15 *Es sei $B = M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_m$ eine Zerlegung einer abgeschlossenen oder offenen Kugel $B \subseteq \mathbb{R}^1$ in $m \geq 2$ Teilmengen M_i , die paarweise durch Transformationen aus \mathcal{T}^1 auseinander hervorgehen. Dann besteht jede Menge M_i , $1 \leq i \leq m$, aus unendlich vielen Zusammenhangskomponenten.*

Beweis: Wir argumentieren indirekt. Die Ränder $\text{bd}(M_i)$ der Mengen M_i bezüglich der Topologie des \mathbb{R}^1 seien also endliche Punktmenge. Dann bestehen die offenen Kerne $\text{int}(M_i)$ aus k disjunkten offenen Intervallen, wobei die Anzahl $k \geq 1$ nicht von i abhängt, da die Mengen M_i paarweise durch Homöomorphismen aus \mathcal{T}^1 aufeinander abbildbar sind. Somit ist das Intervall B in mk offene Intervalle, die Zusammenhangskomponenten der Kerne $\text{int}(M_i)$, $1 \leq i \leq m$, und in die Randpunkte der Mengen M_i , die Elemente von B sind, zerlegt. Die mk Intervalle werden durch $mk - 1$ innere Punkte von B voneinander separiert. Also gilt

$$\text{card} \left(\bigcup_{i=1}^m (\text{bd}(M_i) \cap B) \right) = \begin{cases} mk + 1, & \text{falls } B \text{ abgeschlossen ist,} \\ mk - 1, & \text{falls } B \text{ offen ist.} \end{cases} \quad (3.4)$$

Andererseits gibt es die Darstellung

$$\bigcup_{i=1}^m (\text{bd}(M_i) \cap B) = \bigcup_{i=1}^m (\text{bd}(M_i) \cap M_i),$$

wobei die rechte Vereinigung disjunkt ist. Die Mengen $\text{bd}(M_i) \cap M_i$, $1 \leq i \leq m$, sind alle von derselben Kardinalität l aufgrund der paarweisen \mathcal{T}^1 -Äquivalenz der Mengen M_i . Deshalb gilt

$$\text{card} \left(\bigcup_{i=1}^m (\text{bd}(M_i) \cap B) \right) = ml.$$

Dies steht im Widerspruch zur Formel (3.4). Damit ist die Behauptung verifiziert. \square

Es erübrigt sich fast, hier anzumerken, daß die in diesem Kapitel vorgestellten Resultate den Problemkreis der m -Teilbarkeit von Mengen bezüglich gewisser Transformationsgruppen bei weitem nicht erschöpfen. Die Frage nach der Dreiteilbarkeit euklidischer Kreisscheiben bezüglich der Isometriegruppe der Ebene wurde bereits erwähnt, da sie sich als das nächstliegende ungelöste Problem nach den eingangs vorgestellten Unteilbarkeitsaussagen über konvexe Kompakta ergab. Aber die sehr abstrakt gefaßte Definition 3.1 gibt natürlich zu zahllosen weiteren Fragestellungen Anlaß.

Literaturverzeichnis

- [Au] G. Aumann: *Reelle Funktionen*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen LXVIII, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1954
- [Ba/Pi] V.F. Babenko, S.A. Pichugov: *Approximation of continuous vector functions*, Ukrainskii Matematicheskii Zhurnal 46, 1435–1448, 1994 [russisch]
- [Ba/Ta] S. Banach, A. Tarski: *Sur la decomposition des ensembles de points en parties respectivement congruents*, Fund. Math. 6, 244–277, 1924
- [Bö/He] J. Böhm, E. Hertel: *Polyedergeometrie in n-dimensionalen Räumen konstanter Krümmung*, Mathematische Monographien 14, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1980
- [B/M/S] V. Boltyanski, H. Martini, P.S. Soltan: *Excursions into combinatorial geometry*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1997
- [Bö] W. Börner: *Überdeckungen eines d-dimensionalen Würfels durch zu ihm homothetische, untereinander translationsgleiche Würfel*, FSU Jena, ca. 1990 (unveröffentlichtes Manuskript)
- [Bö/Ri] W. Börner, C. Richter: *Entropy, capacity and arrangements on the cube*, Beiträge Algebra Geom. 38, 227–232, 1997
- [Brei] W. Breidenbach: *Das Delische Problem (Die Verdoppelung des Würfels)*, B.G. Teubner-Verlag, Stuttgart, 1952
- [Bu] U. Buchsbaum: *Personalialia: Dr. E.W. Diehl zum 80.Geburtstag*, Mitt. Thür. Entomologenverband 4, 38–40, 1997
- [Ca/Ste] B. Carl, I. Stephani: *Entropy, compactness and the approximation of operators*, Cambridge tracts in mathematics 98, Cambridge University Press, Cambridge, 1990
- [Ca] J.W.S. Cassels: *An introduction to Diophantine approximation*, Cambridge tracts in mathematics and mathematical physics 45, Cambridge University Press, Cambridge, 1957

- [Du/Sch] N. Dunford, J.T. Schwartz: *Linear operators. Part I: General theory*, Pure and applied mathematics VII, Interscience Publishers, Inc., New York, 1958
- [Edel1] M. Edelstein: *Isometric decompositions*, J. London Math. Soc. (2) 37, 158–163, 1988
- [Ede2] M. Edelstein: *On the indecomposability of compact convex sets*, Proc. Amer. Math. Soc. 115 (3), 737–739, 1992
- [E/J/T] M. Edelstein, K. Johnson, A.C. Thompson: *On the isometric dissection problem for convex sets*, Studia Sci. Math. Hungar. 27, 273–277, 1992
- [Ga/Wa] R.J. Gardner, S. Wagon: *At long last, the circle has been squared*, Notices Amer. Math. Soc. 36, 1338–1343, 1989
- [deG] J. de Groot, *Orthogonal isomorphic representations of free groups*, Can. J. Math. 8, 256–262, 1956
- [Ha] H. Hadwiger: *Die Multikongruenz und der Satz von Banach und Tarski*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 16, 48–53, 1949
- [Hau] F. Hausdorff: *Bemerkungen über den Inhalt von Punktmengen*, Math. Ann. 75, 428–433, 1914
- [He] E. Hertel: *Disjunkte Pflasterungen konvexer Körper*, Studia Sci. Math. Hungar. 21, 379–386, 1986
- [Ko/Ti] A.N. Kolmogoroff, W.M. Tichomirow: *Arbeiten zur Informationstheorie III*, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1960
- [Lac] M. Laczkovich: *Equidecomposability and discrepancy; a solution of Tarski's circle-squaring problem*, J. reine angew. Math. 404, 77–117, 1990
- [Las] M. Lassak: *Covering three-dimensional convex bodies with smaller homothetical copies*, Tagungsbericht 32/1984, Math. Forschungsinstitut Oberwolfach
- [LoE] L. Locher-Ernst: *Wie man aus einer Kugel zwei zu ihr kongruente Kugeln herstellen kann*, Elem. Math. 9, 25–35, 1956
- [Mei] G. Meinardus: *Approximation of functions: Theory and numerical methods*, Springer tracts in natural philosophy 13, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1967
- [Ri1] C. Richter: *Über die Anzahl der entstehenden Zerlegungselemente bei ε -Überdeckungen der Einheitskugel des Raumes l_∞^d* , Diplomarbeit, FSU Jena, 1995

- [Ri2] C. Richter: *Entropy, approximation and the geometry of the cube*, Fo.-Erg. FSU Jena Math/Inf/96/20, 1–13, 1996
- [Ri3] C. Richter: *Chains of controllable partitions of the m -dimensional cube*, Arch. Math. 68, 331–339, 1997
- [Ri4] C. Richter: *Entropy, approximation quantities and the asymptotics of the modulus of continuity*, Math. Nachr. (zum Druck angenommen)
- [Ri5] C. Richter: *Partitioning balls into topologically equivalent pieces*, Elem. Math. (zum Druck angenommen)
- [Ri6] C. Richter: *On decompositions of compact convex sets*, Geom. Dedicata (zum Druck angenommen)
- [Ri/Ste] C. Richter, I. Stephani: *Entropy and the approximation of bounded functions and operators*, Arch. Math. 67, 478–492, 1996
- [Ste] I. Stephani: *Entropy and the approximation of continuous functions*, Arch. Math. 58, 280–287, 1992
- [vdW] B.L. van der Waerden: *Aufgabe 51*, Elem. Math. 4, 18, 1949
- [Wa1] S. Wagon: *Partitioning intervals, spheres and balls into congruent pieces*, Canad. Math. Bull. 26 (3), 337–340, 1983
- [Wa2] S. Wagon: *The Banach-Tarski paradox*, Encyclopedia of mathematics and its applications 24, Cambridge University Press, Cambridge, 1986

Selbständigkeitserklärung

Ich erkläre, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Literatur und Hilfsmittel angefertigt habe.

Jena, 20.11.1997

Christian Richter

Lebenslauf

04.10.1969	Richter, Christian geboren in Jena ledig
September 1976 bis Juni 1984	Besuch der POS „Julius Schaxel“ II in Jena
September 1984 bis Juni 1988	Besuch der ESOS naturwissenschaftlich-technischer Richtung „Carl Zeiss“ in Jena
1988	Abitur
September und Oktober 1988	Labormechaniker im VEB „Carl Zeiss“ in Jena
November 1988 bis Dezember 1989	Militärdienst in der NVA
Dezember 1989 bis September 1990	Hausmeister im Katholischen Altenheim in Jena
September 1990 bis März 1995	Studium der Mathematik an der Friedrich-Schiller-Universität in Jena
27.03.1995	Abschluß des Studiums mit Erlangung des Grades Dipl.-Math.
seit Mai 1995	wissenschaftlicher Mitarbeiter an der Fakultät für Mathematik und Informatik der Friedrich-Schiller-Universität in Jena

Jena, 20.11.1997

Christian Richter